

Gjennomsnittlig andel noder på de to nederste nivåene i komplette trær

Vi har tidligere funnet gjennomsnittet for komplette trær med samme høyde h . Hvis vi setter $n = 2^h$ får vi flg. uttrykk for gjennomsnittet:

$$(1) \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{(k + \frac{n}{2})}{(k + n - 1)}$$

Uttrykket etter summetegnet kan bearbejdes slik:

$$(2) \quad \frac{k + \frac{n}{2}}{k + n - 1} = \frac{k + n - 1 - \frac{n}{2} + 1}{k + n - 1} = 1 - (\frac{n}{2} - 1) \frac{1}{k + n - 1}$$

Dermed kan (1) skrives slik:

$$(3) \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (1 - (\frac{n}{2} - 1) \frac{1}{k + n - 1}) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 1 - \frac{1}{n} (\frac{n}{2} - 1) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k + n - 1} =$$

$$1 - (\frac{1}{2} - \frac{1}{n}) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k + n - 1}$$

Summen går fra 1 til n og kan skrives slik:

$$(4) \quad \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n-1}$$

Husk at det harmoniske tallet H_n er summen av de inverse heltallene fra 1 til n .

Dermed kan (4) skrives slik:

$$(5) \quad H_{2n-1} - H_{n-1} = H_{2n} - \frac{1}{2n} - H_n + \frac{1}{n} = H_{2n} - H_n + \frac{1}{2n}$$

Det gir flg. formel for gjennomsnittlig andel

$$(6) \quad 1 - (\frac{1}{2} - \frac{1}{n})(H_{2n} - H_n + \frac{1}{2n})$$

Det er kjent at grensen for $H_n - \log(n)$ når n går mot uendelig er lik Eulers konstant γ .

Det betyr at differensen $H_{2n} - H_n$ nærmer seg $\log(2n) - \log(n) = \log 2$ når n vokser. Det betyr at grensen for formel (6) når n går mot uendelig, er lik

$$(7) \quad 1 - \frac{1}{2} \log 2$$