

Delkapittel 5.3.8 - Oppgave 1

Oppgaven går ut på å omforme flg. sum:

$$(1) \quad 2[1 \cdot 2^{k-2} + 2 \cdot 2^{k-3} + 3 \cdot 2^{k-4} + \dots + (k-2) \cdot 2^1 + (k-1) \cdot 2^0]$$

Første skritt er å multiplisere 2-tallet inn i summen (1) og snu rekkefølgen:

$$(2) \quad (k-1) \cdot 2^1 + (k-2) \cdot 2^2 + (k-3) \cdot 2^3 + \dots + 2 \cdot 2^{(k-2)} + 1 \cdot 2^{(k-1)}$$

De to siste leddene i (2) kan skrives som $(k - (k-2)) \cdot 2^{k-2} + (k - (k-1)) \cdot 2^{k-1}$.

Dermed kan (2) skrives slik:

$$(3) \quad k \cdot 2^1 + k \cdot 2^2 + k \cdot 2^3 + \dots + 2 \cdot 2^{(k-2)} + 1 \cdot 2^{(k-1)} \\ - (1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + (k-2) \cdot 2^{(k-2)} + (k-1) \cdot 2^{(k-1)})$$

Med bruk av summetegn blir (3) slik:

$$(4) \quad k \cdot \sum_{i=1}^{k-1} 2^i - \sum_{i=1}^{k-1} i \cdot 2^i$$

Det første leddet $k \cdot \sum_{i=1}^{k-1} 2^i$ i (4) kan skrives som $2k \cdot \sum_{i=0}^{k-2} 2^i$ og ved hjelp av formelen

for summen av en geometrisk rekke får vi $2k \cdot (2^{k-1} - 1) = k \cdot 2^k - 2k$. Det andre leddet i (4) har summen (se Formel 1.9.1.9 i Avsnitt 1.9) $(k-2) \cdot 2^k + 2$. Tar vi differensen får vi:

$$(5) \quad k \cdot 2^k - 2k - (k-2) \cdot 2^k - 2 = k \cdot 2^k - 2k - k \cdot 2^k + 2 \cdot 2^k - 2 = 2 \cdot (2^k - 1 - k)$$

Vi har at $n = 2^k - 1$ og dermed at $k = \log_2(n+1)$. Derfor blir summen (1) slik:

$$(6) \quad 2 \cdot (n - \log_2(n+1))$$