Algoritmer og datastrukturer – Avsnitt 5.215 – Algoritmeanalyse

Punkt 5.2.15.4 - Gjennomsnittlig dybde for den første noden i inorden i binære søketrær med *n* forskjellige verdier

Hver permutasjon av tallene fra 1 til n definerer et binært søketre, dvs. det treet vi får ved å legge inn verdiene i den rekkefølgen de har i permutasjonen. Siden det er $n!$ forskjellige permutasjoner, blir det $n!$ binære søktrær. Vi antar at alle har samme sannsynlighet.

La F_n være den gjennomsnittlige nodedybden for den første noden i inorden i binære søketrær med tallene fra 1 til n som verdier. Vi ser med en gang at F_1 = 0 og $F_2 = \frac{1}{2}$. Hver k fra 1 til n har samme sannsynlighet for å ligge i rotnoden. Gjennomsnittlig nodedybde for den første i inorden for de trærne der $k > 1$ ligger i rotnoden, blir 1 + F_{k-1} siden slike trær har $k-1$ noder i venstre subtre. Dermed:

(1) $$F_n = \frac{1}{n}[1+F_1+1+F_2+ \; . \; . \; . \; . \; +1+F_{n-1}]$$

Vi ganger med n på begge sider av likhetstegnet i (1) og får :

(2) $$nF_n = F_1+F_2+ \; . \; . \; . \; . \; +F_{n-1}+n-1$$

Erstatt så n med $n-1$ i (2):

(3) $$(n-1)F_{n-1} = F_1+F_2+ \; . \; . \; . \; . \; +F_{n-2}+n-2$$

Ved å ta differansen mellom (2) og (3) får vi

(4) $$nF_n - (n-1)F_{n-1} = F_{n-1}+1$$

og når ledd med F_{n-1} samles blir det

(5) $$nF_n = nF_{n-1}+1$$ og dermed

(6) $$F_n = F_{n-1}+\frac{1}{n}$$

Ved å bruke at $F_1 = 0$ får vi

(7) $$F_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+ \; . \; . \; . \; . \; +\frac{1}{n} \;, \; n > 1$$

Det gir oss følgende enkle formel for den gjennomsnittlige nodedybden for den første noden i inorden:

(8) $$F_n = H_n - 1 \;, \; n \geq 1.$$