Algoritmer og datastrukturer - Avsnitt 5.2.15 - Algoritmeanalyse

Punkt 5.2.15.2 - Gjennomsnittlig antall noder med ingen barn, ett barn eller to barn i binære søketrær med *n* forskjellige verdier

Bladnoder – noder med ingen barn

La B_n være det gjennomsnittlige antallet bladnoder for binære søketrær med n forskjellige verdier. Gjennomsnittet tas over de *n*! binære søketrærne vi får ved å lage ett tre for hver permutasjon av tallene fra 1 til *n*. Et tomt tre har ingen noder og dermed ingen bladnoder. Dermed definerer vi at $B_0 = 0$. Videre ser vi raskt at $B_1 = B_2 = 1$. La videre $B_n(k)$ være det gjennomsnittlige antallet bladnoder for de binære søketrærne som har k , $1 \leq k \leq n$ som rotnodeverdi.

I et binærtre med minst to noder vil antallet bladnoder være lik summen av antallet bladnoder i rotnodens to subtrær. Det gjelder også hvis et av dem er tomt. Begge kan ikke være tomme siden treet har minst to noder. Dermed :

(1) $B_n(k) = B_{k-1} + B_{n-k}$, $n > 1$, $1 \leq k \leq n$.

Siden alle verdiene har samme sannsynlighet for å ligge i rotnoden, får vi

(2) $B_n = \frac{1}{n} [\, B_n(1) + B_n(2) + \; . \; . \; . \; . \; + B_n(n) \,]$ og ved hjelp av (1) at

(3) $B_n = \frac{2}{n} (\, B_0 + B_1 + \; . \; . \; . \; . \; + B_{n-1} \,)$.

Vi ganger med n på begge sider av likhetstegnet i (3) og får

(4) $n\, B_n = 2\, (\, B_0 + B_1 + \; . \; . \; . \; . \; + B_{n-1} \,)$.

Erstatt så n med $n-1$ i (4):

(5) $(n-1)\, B_{n-1} = 2\, (\, B_0 + B_1 + \; . \; . \; . \; . \; + B_{n-2} \,)$.

Ved å ta differansen mellom (4) og (5) får vi

(6) $n\, B_n - (n-1)\, B_{n-1} = 2\, B_{n-1}$

og når ledd med B_{n-1} samles blir det

(7) $n\, B_n = (n+1)\, B_{n-1}$ og dermed

(8) $\frac{B_n}{n+1} = \frac{B_{n-1}}{n}$.

Ved å gjenta (8) inntil $n = 3$ og så bruke at $B_2 = 1$ blir det

(9) $\dfrac{B_n}{n+1} = \dfrac{B_2}{3} = \dfrac{1}{3}$ og

(10) $B_n = \dfrac{(n+1)}{3}$, $n > 1$, $B_0 = 0$, $B_1 = 1$

Noder med to barn

La så T_n være det gjennomsnittlige antallet noder med to barn. Da er opplagt $T_0 = T_1 = T_2 = 0$. La videre $T_n(k)$ være det gjennomsnittlige antallet tobarnsnoder for de binære søketrærne som har k , $1 \le k \le n$ som rotnodeverdi. Da gjelder

(11) $T_n(k) = T_{k-1} + T_{n-k} + \alpha$

der $\alpha = 0$ for $k = 1$ og $k = n$, og $\alpha = 1$ for $1 < k < n$ fordi rotnoden blir en tobarnsnode kun når ingen av rotnodens to subtrær er tomme. Dermed

(12) $T_n = \dfrac{1}{n}[T_n(1) + T_n(2) + \ldots\ldots + T_n(n)]$ og

(13) $T_n = \dfrac{2}{n}(T_0 + T_1 + \ldots\ldots + T_{n-1} + n - 2)$.

Vi ganger med n på begge sider av likhetstegnet i (13) og får

(14) $n\,T_n = 2\,(T_0 + T_1 + \ldots\ldots + T_{n-1} + n - 2)$.

Erstatt så n med $n-1$ i (14):

(15) $(n-1)T_{n-1} = 2\,(T_0 + T_1 + \ldots\ldots + T_{n-2} + n - 3)$.

Ved å ta differansen mellom (14) og (15) får vi

(16) $n\,T_n - (n-1)T_{n-1} = 2\,T_{n-1} + 1$,

og når ledd med T_{n-1} samles blir det:

(17) $n\,T_n = (n+1)T_{n-1} + 1$ og dermed

(18) $\dfrac{T_n}{n+1} = \dfrac{T_{n-1}}{n} + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{T_{n-1}}{n} + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$.

Ved å gjenta (18) inntil $n = 3$ og så bruke at $T_2 = 0$, får vi

(19) $$\frac{T_n}{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \;....\; + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{T_2}{3}$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} + \frac{T_2}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} \text{ siden } T_2 = 0.$$

Dermed blir

(20) $$T_n = (n+1)(\frac{1}{3} - \frac{1}{n+1}) = \frac{n-2}{3} \;,\; n > 1 \;,\; T_0 = T_1 = 0$$

Noder med ett barn

La så E_n være det gjennomsnittlige antallet noder med ett barn. Vi har

(21) $$B_n + E_n + T_n = n$$

og dermed at

(22) $$E_n = \frac{(n+1)}{3} \;,\; n > 1 \;,\; E_0 = E_1 = 0$$