Algoritmer og datastrukturer - Avsnitt 5.1.19 - Algoritmeanalyse

Punkt 5.1.19.1 - Antallet isomorft forskjellige binære trær

I Avsnitt 5.1.2 ble $C(n)$ definert som antallet forskjellige binære trær med n noder og vi fant at $C(n)$ oppfylte rekursjonslikningen:

(1) $$C(n) \;=\; C(0)C(n-1) \;+\; C(1)C(n-2) \;+\; \ldots \;+\; C(n-1)C(0)$$

Vi skal nå vise påstanden: $C(n) \;=\; \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$.

Den genererende funksjonen $G(x)$ er gitt ved

(2) $$G(x) = C(0) \;+\; C(1)x \;+\; C(2)x^2 \;+\; \ldots + C(k)x^k \;+\; \ldots$$

Vi ønsker å finne rekkeutviklingen til kvadratet av $G(x)$, dvs. vi vil finne hva a_k blir for hver k i rekken:

(3) $$G^2(x) \;=\; a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k + \ldots$$

Vi ser fort at $a_0 = C(0)C(0)$, og da vi vet at $C(0) = C(1) = 1$ blir $a_0 = C(1)$. Videre blir $a_1 = C(0)C(1)+C(1)C(0)$ og $a_2 = C(0)C(2)+C(1)C(0)+C(2)C(0)$. Ved hjelp av (1) ser vi at $a_1 = C(2)$, $a_2 = C(3)$ og generelt $a_k = C(k+1)$. Dvs.

(4) $$G^2(x) \;=\; C(1) + C(2)x + C(3)x^2 + \ldots + C(k+1)x^k + \ldots$$

Hvis vi først ganger med x på begge sider i (4) og så legger til $C(0) = 1$ får vi

(5) $$xG^2(x) + 1 \;=\; G(x)$$

Dette er en 2. gradsligning i $G(x)$ og løsningen blir

(6) $$G(x) \;=\; \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} \quad \text{eller} \quad 1-2xG(x) \;=\; \sqrt{1-4x}$$

Likningen (5) har egentlig to løsninger, men det er kun den med minus foran rottegnet som er interessant siden vi må ha $G(x) = 0$. Uttrykket $\sqrt{1-4x}$ kan rekkeutvikles ved hjelp av binomialteoremet siden vi generelt har

(7) $$(1+ax)^r \;=\; \sum_{k=0}^{\infty}\binom{r}{k}a^k x^k \quad \text{der } a \text{ og } r \text{ reelle tall.}$$

Setter vi $a = -4$ og $r = 1/2$ får vi $\sqrt{1-4x}$. Men denne rekken er litt komplisert å utvikle. Vi gjør heller en liten vri ved hjelp av (6) og derivasjon:

(8) $xG(x) = \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2}$ og $(xG(x))' = \dfrac{1}{\sqrt{1-4x}} = (1-4x)^{-1/2}$

Vi bruker binomialteoremet med $a = -4$ og $r = -1/2$.

(9) $$\binom{-1/2}{k} = \frac{(-1/2)(-1/2-1)\,.....\,(-1/2-k+1)}{k!}$$

$$= \frac{(-1/2)(-3/2).....(-(2k-1)/2)}{k!} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot .....\cdot(2k-1)}{(-2)^k k!}$$

$$= \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot .....\cdot(2k-1)\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdot .....\cdot 2k}{(-2)^k k!\, 2\cdot 4\cdot 6\cdot .....\cdot 2k} = \frac{(2k)!}{(-4)^k k!\, k!} = \frac{1}{(-4)^k}\binom{2k}{k}$$

Ved hjelp av (7), (8) og (9) får vi

(10) $$(xG(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-4x}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(-4)^k}\binom{2k}{k}(-4)^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{2k}{k}x^k$$

(11) $$xG(x) = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty}\binom{2k}{k}t^k\,dt = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}x^{k+1}$$

(12) $$G(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}x^k$$

Da den genererende funksjonen $G(x)$ er definert ved (2) får vi

$$C(n) = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$