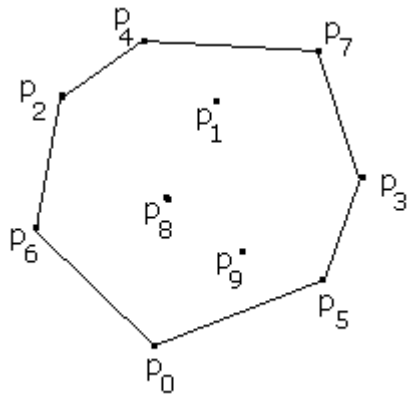
Algoritmer og datastrukturer
Kapittel 2 - Delkapittel 2.2

2.2 Konvekse polygoner

2.2.1 Konveksitet



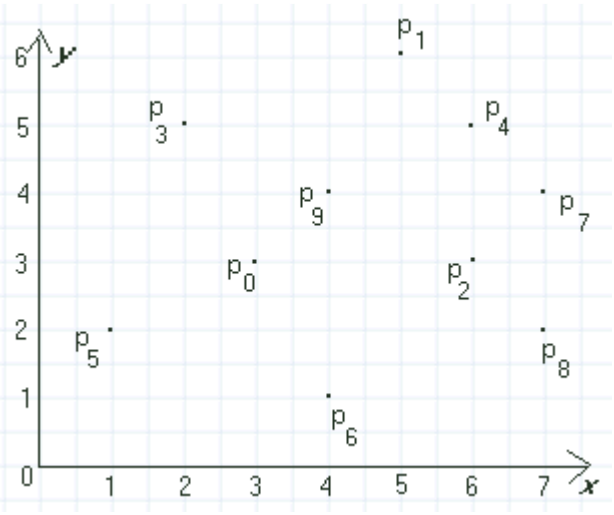
Figur 2.2.1 a): Konvekst polygon

La p_0 , p_1 , p_2 . . . . . , p_{n-1} være en samling på n punkter i xy-planet. Den konvekse innhylningen H (engelsk: the convex hull) til disse punktene er den minste konvekse mengden som omfatter alle punktene, og det konvekse polygonet er randen eller kanten til H. Litt uformelt kan vi si at det konvekse polygonet er det polygonet vi får ved kun å ta med punktene i «ytterkant».

Til venstre er det konvekse polygonet for de 10 punktene p_0 , p_1 , ... p_9 tegnet inn.

Vi ser at hvert punkt enten ligger på selve polygonet eller det ligger inne i polygonet. I tillegg ser vi at alle de indre vinklene i polygonet er mindre enn 180 grader.

Det å finne det konvekse polygonet til en samling punkter er et viktig problem i plangeometri. Da holder det selvfølgelig å finne de punktene som utgjør hjørnene i polygonet. Noen slike hjørner kan vi fort finne. I *avsnitt 1.4.5* så vi på hvordan punkter kunne ordnes leksiografisk. Da kunne vi enten ordne med hensyn på x-koordinaten først, og så med hensyn på y-koordinaten, eller eventuelt omvendt. Hvis vi velger det minste og største punktet med hensyn på begge de to leksiografiske ordningene, så får vi hjørnepunkter. I *figur 2.2.1 a)* over ville vi på denne måten ha fått hjørnepunktene p_6, p_3, p_0 og p_4. I *figur 2.2.1 b)* nedenfor ville det ha blitt p_5, p_7, p_6 og p_1. Det er p_7 og ikke p_8, som er størst. De har samme x-koordinat, og da er det størst som har størst y-koordinat.



Figur 2.2.1 b): Et koordinatsystem

Eksempel 1 Flg. 10 punkter er gitt: (3,3), (5,6),(6,3),(2,5), (6,5),(1,2),(4,1), (7,4), (7,2) og (4,4). Vi nummererer punktene fra 0 til 9. Det første punktet kaller vi p_0, det neste p_1, osv. Til venstre, i *figur 2.2.1 b)*, har vi plottet punktene.

I *avsnitt 1.4.5* laget vi en komparator som var basert på en leksiografisk ordning. Den var laget slik at vi først ordnet etter x-koordinaten, og så etter y-koordinaten.

Koden for *class XkoordinatKomparator* satt opp på nytt nedenfor. Den brukes et program som finner minste og største punkt mhp. komparatoren. Et punkt lager vi ved hjelp av *class Point* fra *java.awt*.

```
public class XkoordinatKomparator implements Comparator, Serializable
{
  public int compare(Object o1, Object o2)
  {
    Point p1 = (Point)o1;  // gjør om fra Object til Point
    Point p2 = (Point)o2;  // gjør om fra Object til Point

    if (p1.x < p2.x) return -1;  // p1 har minst x-koordinat
    if (p1.x > p2.x) return 1;   // p1 har størst x-koordinat

    // Nå har p1 og p2 like x-koordinater

    if (p1.y < p2.y) return -1;  // p1 har minst y-koordinat
    if (p1.y > p2.y) return 1;   // p1 har størst y-koordinat
    return 0;
  }

} // class XkoordinatKomparator
```

Programkode 2.2.1 a)

I utgangspunktet er punktene representert ved hjelp av to heltallstabeller, en tabell for *x*-koordinater og en for *y*-koordinater:

```
int[] x = {3,5,6,2,6,1,4,7,7,4};
int[] y = {3,6,3,5,5,2,1,4,2,4};

Point[] p = new Point[x.length]; // en punkt-tabell
for (int i = 0; i < p.length; i++) p[i] = new Point(x[i],y[i]);

Comparator c = new XkoordinatKomparator();

Point a = p[Tabell.min(p,0,p.length,c)];   // finner minste
Point b = p[Tabell.maks(p,0,p.length,c)];  // finner største

System.out.println("(" + a.x + "," + a.y + ") er minst");
System.out.println("(" + b.x + "," + b.y + ") er størst");
```

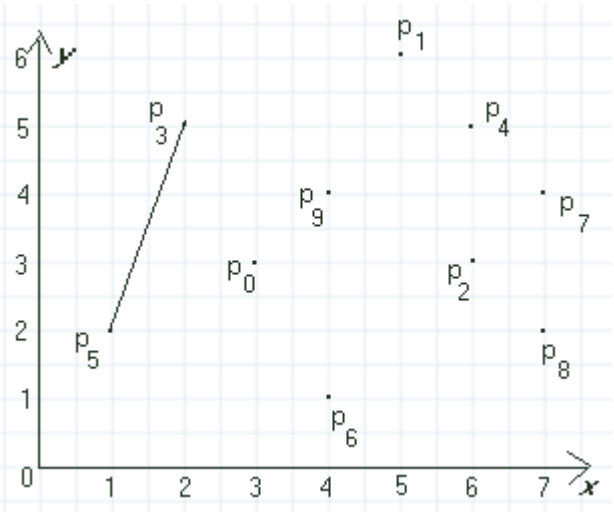
Programkode 2.2.1 a)

Vi forutsetter her at det finnes to generisk metoder *min* og *maks* som tar en tabell, et fra/til interval og en komparator som parametere. I tillegg antas det at disse metodene ligger som statiske metoder i *class Tabell*.

2.2.2 Innpakkingsmetoden

Innpakkingsmetoden (engelsk: the gift wrapping algorithm) kalles også Jarvis' marsj (engelsk: Jarvis' march) etter R.A.Jarvis som lanserte den i 1973. Det er en metode som finner de punktene i en punktsamling som utgjør hjørnene i det konvekse polygonet.

Metoden starter med at vi finner et hjørnepunkt og vi kaller det et **ankerpunkt**. Vi så i *avsnitt 2.2.1* at vi lett kan finne et hjørnepunkt ved å bruke en leksiografisk ordning av punktene. Vi tenker oss så at det i hvert punkt står en loddrett pinne (loddrett på xy-planet). En lang tråd festes i ankerpunktets pinne og holdes stram på en slik måte at alle de andre punktene/pinnene ligger på den ene siden av tråden. Så roterer vi tråden mot punktmengden mens den holdes stram. De punktene/pinnene som tråden fortløpende treffer er hjørner i det



Figur 2.2.2 a): Innpakkingsmetoden

konvekse polygonet. Vi roterer til vi har kommet helt rundt punktmengden og tilbake til ankerpunktet.

Vi tar utgangspunkt i *figur 2.2.2 a)*. Der velger vi punktet med minst x-koordinat som ankerpunkt. Det er $p_5 = (1,2)$.

Deretter skal vi finne det største punktet med hensyn på en bestemt ordning. Gitt to punkter p og q som begge er forskjellige fra ankerpunktet a. Vi sier at p er mindre enn q mhp. a hvis p ligger på høyre side av den rette linjen som går gjennom a og q, orientert fra a til q, eller p ligger på denne linjen mellom a og q. Vi lager en komparator som gjenspeiler denne ordningen:

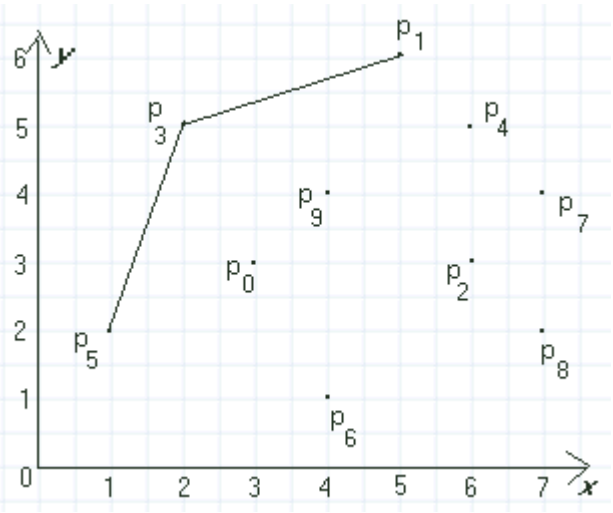
```
public class AnkerpunktKomparator implements Comparator, Serializable
{
  private Point a;  // et ankerpunkt

  public AnkerpunktKomparator(Point ankerpunkt)
  {
    a = ankerpunkt;
  }

  public int compare(Object o1, Object o2)
  {
    Point p = (Point)o1;  // gjør om o1 til Point
    Point q = (Point)o2;  // gjør om o2 til Point

    int d = (q.x - a.x)*(p.y  - a.y) - (q.y - a.y)*(p.x  - a.x);
    if (d != 0) return d;
    return (q.x - a.x)*(p.x - q.x) + (q.y - a.y)*(p.y - q.y);
  }
} // AnkerpunktKomparator
```

Programkode 2.2.2 a)

Det er $a = p_5 = (1,2)$ som er ankerpunkt. Hva er det største punktet blant resten mhp. vår nye ordning? Det er det punktet p_k som er slik at når vi trekker en rett linje gjennom p_5 og p_k, vil alle de andre punktene ligge til høyre for linjen, eller eventuelt på linjen fra p_5 og p_k.

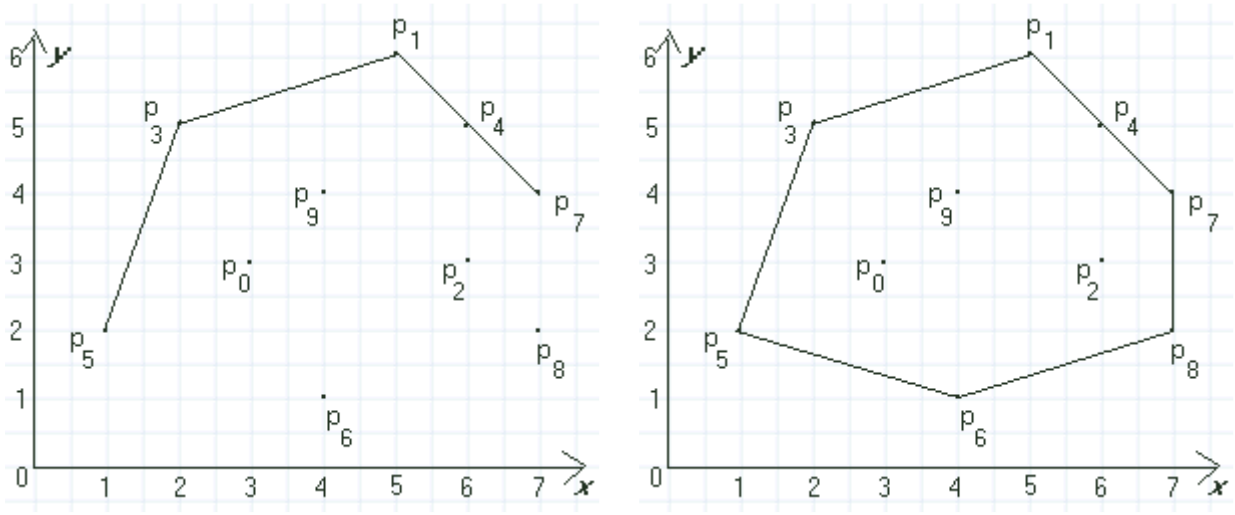
Vi ser at det må være p_3 som dermed blir det nye ankerpunktet. Linjestykket fra p_5 til p_3 blir en kant i det konvekse polygonet. Vi finner så det største, mhp. p_3, av resten av punktene. Det må være p_1 siden resten av punktene ligger på høyre side av den rette linjen gjennom p_3 og p_1. Punktet p_1 blir dermed nytt ankerpunkt for den videre søkingen. Linjestykket fra p_3 til p_1 blir en kant i det konvekse polygonet. Se *figur 2.2.2 b)*.

Vi finner så det største mhp. p_1, av resten av punktene. Det er p_7 og ikke p_4. Den måten vi har definert «større enn» mhp. p_1 gjør at p_7 er «større enn» p_4.



Det neste punktene vi finner på denne måten er p_8 og p_6 . Dermed er vi ferdige. Se *figur 2.2.2 c)* og *figur 2.2.2 d)*. Dermed fant vi flg. hjørnepunkter: p_5 , p_3 , p_1 , p_7 , p_8 og p_6 .

Figur 2.2.2 b): Innpakkingsmetoden



Figur 2.2.2 c): Avslutningen av innpakkingsmetoden

Et problem som vi har underslått i diskusjonen ovenfor er hvordan algoritmen skal stoppe. Det må bli når vi kommer tilbake til ankerpunktet vi startet med. Ved ombytting legger vi startpunktet bakerst. Dermed deltar punktet under letingen etter nye "maks-punkter".

```
int[] x = {3,5,6,2,6,1,4,7,7,4};
int[] y = {3,6,3,5,5,2,1,4,2,4};

int n = x.length;  // for å forenkle notasjonen

Point[] p = new Point[n]; // en punkt-tabell

for (int i = 0; i < n; i++) p[i] = new Point(x[i],y[i]);

// Finner et startpunkt, f.eks. det minste punktet m.h.p
// XkoordinatKomparatoren. Det blir punktet lengst ned til venstre.
// Ved en ombytting legger vi punktet bakerst - i posisjon n-1.

Tabell.bytt(p,n-1,Tabell.min(p,0,n,new XkoordinatKomparator()));

// Finner det neste hjørnepunktet, d.v.s. det største punktet
// mhp. startpunktet og legger det først - i posisjon 0.
```

```
Tabell.bytt(p,0,Tabell.maks(p,0,n-1,new AnkerpunktKomparator(p[n-1])));

// Finner nye hjørner inntil vi er tilbake til startpunktet
int k = 1;
for ( ; k < n; k++)
{
  int m = Tabell.maks(p,k,n,new AnkerpunktKomparator(p[k-1]));
  Tabell.bytt(p,k,m);
  if (m == n-1) break; // vi har kommet rundt
}

// hjørnepunktene ligger nå i p[0:k]
for (int i = 0; i <= k; i++) System.out.println(p[i]);
```

Programkode 2.2.2 b)

2.2.3 Graham's scan

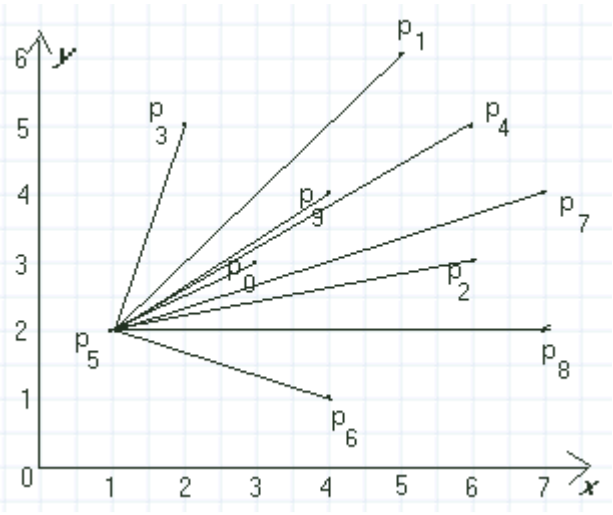
Graham's scan er oppkalt etter R.L. Graham som lanserte denne metoden i 1972. Første skritt i algoritmen er å finne et ankerpunkt. Deretter sorteres punktene mhp. ankerpunktet. Koden for dette er svært enkel. Under sorteringen bruker vi her innsettingssortering, men senere, når vi har utviklet mer avanserte sorteringsmetoder, vil vi naturligvis bruke dem isteden. Vi antar at innsettingssortering ligger i *class Tabell* og har tre parametere - en tabell, en dimensjon og en komparator.

```
int[] x = {3,5,6,2,6,1,4,7,7,4};
int[] y = {3,6,3,5,5,2,1,4,2,4};

int n = x.length;  // for å forenkle notasjonen

Point[] p = new Point[n]; // en punkt-tabell

// legger inn x- og y-verdiene
for (int i = 0; i < n; i++) p[i] = new Point(x[i],y[i]);

Comparator c = new PunktKomparator(); // leksiografisk komparator

// f.eks. minst etter leksiografisk ordning blir et ankerpunkt
Point a = new Point(p[Tabell.min(p,0,n,c)]);

// sorterer mhp. ankerpunktet - her kan en selvfølgelig
// bruke en annen sorteringsmetode
Tabell.innsettingssortering(p,new AnkerpunktKomparator(a));

// skriver ut punktene i sortert rekkefølge
for (int i = 0; i < n; i++) System.out.println(p[i]);
```

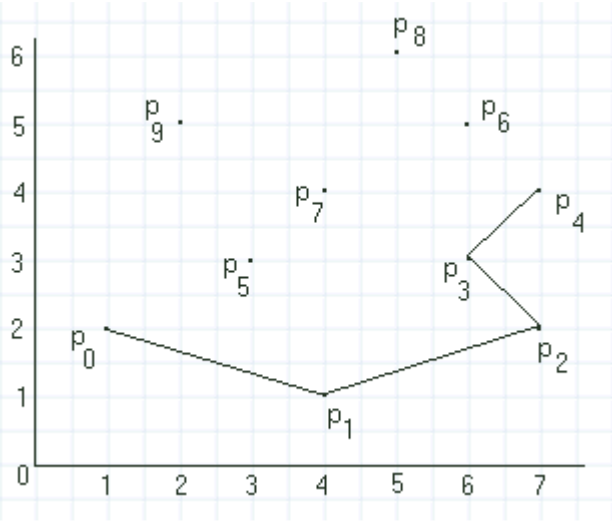
Programkode 2.2.3 a)

I *Programkode* 2.2.3 *a)* har vi for eksemplets skyld valgt de 10 punktene (3,3), (5,6), (6,3), (2,5), (6,5), (1,2), (4,1), (7,4), (7,2) og (4,4), og de er tegnet inn i den samme rekkefølgen i *Figur* 2.2.3 *a)*. Ankerpunktet som velges blir p_5 = (1,2).

Stigende sortering mhp. p_5 gir rekkefølgen: (1,2), (4,1), (7,2), (6,3), (7,4), (3,3), (6,5), (4,4), (5,6) og (2,5).



Figur 2.2.3 a): Punktsortering



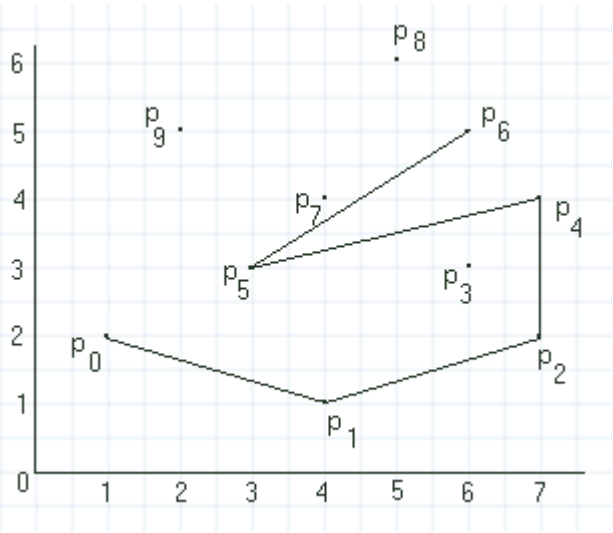
Figur 2.2.3 b): Starten på Graham's scan

Dette kan også ses på som en ordning med stigende vinkel. På *Figur* 2.2.3 *a)* er det trukket en linje fra ankerpunktet til de andre punktene. Der ser vi hvor store vinklene er. Lag et program som kjører *Programkode* 2.2.3 *a)* og sjekk at utskriften blir som påstått!

På *figur 2.2.3 b)* har vi døpt om punktene slik at de nå er nummerert etter sin sorterte rekkefølge.

Neste skritt i Graham's scan er å traversere og fortløpende tegne kanter i punktrekkefølgen. Vi trekker en kant fra p_0 til p_1 , så en fra p_1 til p_2 , osv. Så lenge som vi under denne traverseringen beveger oss mot klokken, så fortsetter vi.

Første gang det går galt er når vi går fra p_3 til p_4 . Da har vi "snudd oss" med klokken. Vi går da to posisjoner bakover - tilbake til p_2, hopper så over p_3 , og går rett til p_4 . Fra p_4 går vi videre til p_5 . Når vi så går videre til p_6 gjør vi en sving med klokken. Se *figur 2.2.3 c)*. Dermed må vi trekke oss to posisjoner bakover - tilbake til p_4 , hopper så over p_5 og går rett til p_6 . Vi får samme problemet på nytt når vi går fra p_7 til p_8. Dermed hopper vi over p_7 , går rett til p_8 , videre til p_9 og til slutt til p_0 . Vi har funnet det konvekse polygonet.



Figur 2.2.3 c): Starten på Graham's scan

Det vil være situsjoner der det ikke er nok å trekke seg to posisjoner bakover. Det vi gjør er at for hver posisjon vi trekker oss bakover til, undersøker vi om vi får reist mot klokken ved å gå videre derfra direkte til det punktet der vi oppdaget at vi hadde gått med klokken.

Dette er ikke så vanskelig å få implementert. Vi trenger kun en enkel måte å kunne "trekke oss bakover". Det gjør vi ved fortløpende å legge de punktene vi besøker på en stakk (engelsk: stack). En stakk er en datastruktur der det vi sist la inn er det vi først får tatt ut. Datastrukturen stakk blir diskutert i kapitlet *Stakker, køer og prioritetskøer*.

Vi tar utgangspunkt i *programkode 2.2.3 a)* og fortsetter der vi sluttet:

```
Stack s = new Stack();  //  Denne henter vi fra java.util

// legger de tre første punktene på stakken
s.push(p[0]); s.push(p[1]); s.push(p[2]);

Point b, p1, p2;  // hjelpevariabler
Comparator bc;    // en komparator

for (int i = 3; i < n; i++)
{
  p2 = p[i];

  while (true)
  {
    p1 = (Point)s.pop(); // tar fra stakken
    b = (Point)s.peek(); // ser på den øverste
    bc = new AnkerpunktKomparator(b);

    if (bc.compare(p2,p1) > 0)
    {
      // ingen med klokken "knekk" - legger p1 tilbake
      s.push(p1);
      break;
    }
  }
  s.push(p2);  // legger p2 på stakken
}

// Skriver ut hjørnepunktene
while (!s.empty())
{
  p1 = (Point)s.pop();
  System.out.println("(" + p1.x + "," + p1.y +")");
}
```

Programkode 2.2.3 b)