1.8 Algoritmeanalyse

1.8.1 En algoritmes arbeidsmengde

I *Delkapittel* 1.1 ble det definert og diskutert flere begreper knyttet til algoritmeanalyse. Her kommer en kort oppsummering:

- **Arbeidsoperasjoner** En algoritme er en beskrivelse av de *arbeidsoperasjonene* som skal til for å løse en bestemt oppgave.
- **Oppgave, algoritme og implementasjon** Våre «oppgaver» vil være slike som kan løses ved hjelp et program (eller en metode) skrevet i f.eks. Java. Vi skiller mellom selve oppgaven, en algoritme for å løse oppgaven og en implementasjon (kode) av algoritmen. Det er ofte flere måter å løse en oppgave, dvs. flere mulige algoritmer for samme oppgave og en bestemt algoritme kan ofte kodes på flere måter.
- **Dominerende operasjon** Blant arbeidsoperasjonene er det vanligvis en som er viktigere, er mer sentral eller er mer kostbar og utføres oftere enn de andre. Det kalles den *dominerende* operasjonen. F.eks. er det å *sammenligne* to verdier en dominerende operasjon i vanlig sortering. I numeriske algoritmer (algoritmer med tallberegninger) kan f.eks. en multiplikasjon (eller kanskje en divisjon) være en dominerende operasjon.
- **Arbeidsmengde** I mange algoritmer er det mulig å «telle opp» antallet ganger den dominerende operasjonen utføres. Dette antallet utgjør algoritmens *arbeidsmengde*.
- **Orden** Arbeidsmengden kan ofte uttrykkes som en *funksjon* av oppgavens størrelse n. Denne funksjonen definerer algoritmens *orden*.

Eksempel I *Delkapittel* 1.1 diskuterte vi «oppgaven» å finne posisjonen til den største verdien i en heltallstabell. Flg. metode løser oppgaven:

```
public static int maks(int[] a)
{
  int m = 0;                // indeks til største verdi
  int maksverdi = a[0];     // største verdi

  for (int i = 1; i < a.length; i++) if (a[i] > maksverdi)
  {
    maksverdi = a[i];       // største verdi oppdateres
    m = i;                  // indeks til største verdi oppdaters
  }
  return m;   // returnerer indeks/posisjonen til største verdi

} // maks
```

***Programkode* 1.8.1**

Den dominerende operasjonen i *Programkode* 1.8.1 er sammenligningen `a[i] > maksverdi`. Anta at tabellen a har n verdier, dvs. at $n = a.length$. For-løkken går da $n - 1$ ganger og siden sammenligningen utføres hver gang, blir det $n - 1$ operasjoner. Med andre ord er arbeidsmengden gitt ved $f(n) = n - 1$. Algoritmen er dermed av orden n (lineær orden).

1.8.2 Den asymptotiske rangeringen av funksjoner

Som nevnt i *Avsnitt* 1.8.1 kan arbeidsmengden til en algoritme ofte uttrykkes ved hjelp av en funksjon $f(n)$ der n er «størrelsen» på oppgaven. Det er forskjellige typer funksjoner som kan inngå i en slik sammenheng. Tabellen under viser de typene som oftest inngår:

Funksjonstype	**n** = 1	**n** = 10	**n** = 100	**n** = 1000	**Beskrivelse**
$f_1(n) = 1$	1	1	1	1	*konstant*
$f_2(n) = \log_2 n$	0	3,3	6,6	9,97	*logaritmisk*
$f_3(n) = \sqrt{n}$	1	3,2	10	31,6	*kvadratrot*
$f_4(n) = n$	1	10	100	1000	*lineær*
$f_5(n) = n \log_2 n$	0	33,2	664,4	9.965,8	*lineæritmisk*
$f_6(n) = n^2$	1	100	10.000	1.000.000	*kvadratisk*
$f_7(n) = n^3$	1	1.000	1.000.000	10 siffer	*kubisk*
$f_8(n) = 2^n$	2	1.024	31 siffer	302 siffer	*eksponensiell*
$f_9(n) = n!$	1	3.628.800	158 siffer	2568 siffer	*faktoriell*

Tabell 1.8.2 - Asymptotisk rangering av funksjonstyper

Funksjonene i *Tabell* 1.8.2 er satt opp i rekkefølge (rangert) etter *asymptotisk* «oppførsel». Det er funksjonsverdiene for store argumentverdier n som er avgjørende. For $n = 1$ er mange av funksjonsverdiene like. Men allerede for $n = 10$ ser vi at rekkefølgen på funksjonene er nesten helt i samsvar med rekkefølgen på funksjonsverdiene. Det er kun $\log_2 n$ og $\sqrt{n}$ med funksjonsverdier 3,3 og 3,2 som er i utakt. Men for $n = 100$ stemmer det helt. Ellers ser vi at det er til dels enormt store forskjeller mellom funksjonsverdiene for store verdier av n.

Men hensyn på asymptotisk «oppførsel» sier vi at jo høyere opp i *Tabell* 1.8.2 en funksjon står, jo «mindre» er funksjonen. Det betyr for eksempel at funksjonen $f_2(n) = \log_2 n$ er asymptotisk sett «mindre enn» funksjonen $f_3(n) = \sqrt{n}$. Se *Avsnitt* 1.8.5.

I *Tabell* 1.8.2 inngår logaritmefunksjonen med grunntall 2, dvs. $f(n) = \log_2 n$. Det kan være aktuelt med andre grunntall, f.eks. 10 eller e. I det første tilfellet (grunntall 10) vil logaritmen bli skrevet $\log_{10} n$ og i det andre (grunntall e) kun $\log n$. Med andre ord hvis det ikke står noen indeks som indikerer grunntall, tas det som gitt at grunntallet er $e = 2{,}718\cdots$. Logaritmen med grunntall e kalles også den *naturlige* logaritmen og mange betegner den med $\ln n$. Her vil vi konsekvent skrive $\log n$ siden den heter det i Java. Funksjonen $n \log_2 n$ (eller bare $n \log n$) kalles *lineæritmisk* (eng: linearithmic). Ordet er en «sammentrekning» av ordene *lineær* og *logaritmisk*. På norsk kalles den også *loglineær*.

En funksjon $f(n)$ for arbeidsmengden til en algoritme er vanligvis en lineærkombinasjon av flere ledd, dvs. på formen $a_1 f_1(n) + a_2 f_2(n) + \cdots + a_k f_k(n)$ der a_1 til a_k er konstanter og $f_1(n)$ til $f_k(n)$ er funksjoner for eksempel fra *Tabell* 1.8.2.

For eksempel kan en slik funksjon være gitt som følgende lineærkombinasjon:

(1.8.2.1) $\quad f(n) = 2n^2 + 3n + \log_2 n - 1$

I (1.8.2.1) inngår funksjonene n^2, n, $\log_2 n$ og 1 fra *Tabell* 1.8.2. Av disse er det n^2 som står lengst ned i tabellen. Det er derfor den som avgjør den asymptotiske oppførselen til $f(n)$. Verdiene til de andre leddene blir bare «småtterier» i forhold til verdiene til n^2 for store verdier av n. Derfor kalles n^2 det *dominerende* leddet i $f(n)$.

> **Dominerende ledd** La funksjonen $f(n)$ være en lineærkombinasjon av flere ledd fra *Tabell* 1.8.2. Det av leddene i $f(n)$ som står lengst ned i *Tabell* 1.8.2 (det «største» leddet), bestemmer den asymptotiske oppførselen til $f(n)$. Dette leddet kalles funksjonens *dominerende* ledd.

I funksjonen i (1.8.2.1) står det et 2-tall foran n^2, dvs. $2n^2$. Men 2-tallet er en konstant og det ser vi bort fra. Det er n^2 som er det dominerende leddet.

> **Algoritmeorden** Anta at vi har en algoritme som løser en oppgave av «størrelse» n og at arbeidsmengden er gitt som en funksjon av n. Hvis $g(n)$ er funksjonens dominerende ledd, sier vi at algoritmen er av *orden* $g(n)$.

Eksempel 1 Hvis arbeidsmengden til en algoritme er gitt ved $f(n) = 2n^2 + 3n + \log_2 n - 1$, så er algoritmen av *orden* n^2 eller av *kvadratisk orden*.

Eksempel 2 La arbeidmengden til en algoritme være gitt ved $f(n) = 0{,}2\sqrt{n} + 10\log_2 n + 8$. Da er algoritmen av *orden* $\sqrt{n}$ eller av *kvadratrotorden*.

Oppgaver til Avsnitt 1.8.2

1. Hva er det dominerende leddet i funksjonen $f(n) = 0{,}1n^2 + 10n\log_2 n$
2. Ta grafene til $f_1(n) = 0{,}1n^2$ og $f_2(n) = 10n\log_2 n$ for $n \geq 2$. De vil krysse hverandre for en n_0 til høyre for 2. Dvs. grafen til f_1 ligger under den til f_2 mellom 2 og n_0 og grafen til f_1 ligger over den til f_2 for alle verdier av n større enn n_0. Denne verdien n_0 er selvfølgelig et desimaltall. Finn det minste heltallet som er større n_0, dvs. finn $k = \lceil n_0 \rceil$.
3. I *Tabell* 1.8.2 står de funksjonene som oftest inngår i algoritemanalyse. Men det er flere. Utvid tabellen og sett flg. funksjoner på rett plass med hensyn på asymptotisk oppførsel:

   a) $(\log_2 n)^2$ b) $\log_2(\log_2 n)$ c) $n^2 \log_2 n$ d) $n^{3/2} = n\sqrt{n}$ e) $\log_2(n^2)$

1.8.3 Eksempler på arbeidsmengde og algoritmeorden

Tabell 1.8.2 gir en oversikt over de funksjonstypene som oftest inngår som ledd i en funksjon som definerer arbeidsmengden i en algoritme. Her er noen eksempler på dette:

Eksempel 1 Flg. metode returnerer den siste verdien i en heltallstabell:

```
public static int sisteVerdi(int[] a)
{
  int n = a.length;
  if (n > 0) return a[n - 1];
  else throw new NoSuchElementException("Tabellen er tom!");
}
```

I metoden i *Eksempel* 1 hentes (og returneres) siste verdi i tabellen *a*. Her er det rimelig å si at tabelloperasjonen `a[n - 1]` er dominerende og den utføres kun én gang uansett hvor mange verdier tabellen måtte ha. Tabellens lengde er n og funksjonen f som angir antallet ganger den dominerende operasjonen utføres som funksjon av n, er gitt ved $f(n) = 1$. Dvs. en konstant funksjon. Algoritmen er derfor av *konstant orden*.

Eksempel 2 Heltallene 1, 2, 4, 8, 16, · · · osv. kalles potenser av 2 siden hvert av dem er på formen formen 2^k. Flg. metode skriver ut alle potenser av 2 som er mindre enn eller lik n :

```
public static void skriv2potens(int n)
{
  for (int k = 1; k <= n; k *= 2) System.out.print(k + " ");
}
```

Metoden kan brukes til f.eks. å skrive ut alle 2-potenser som er mindre enn 1000:

```
skriv2potens(1000);    // Utskrift: 1 2 4 8 16 32 64 128 256 512
```

I metoden i *Eksempel* 2 inngår multiplikasjonen `k *= 2` og en utskriftssetning. De utføres nøyaktig like mange ganger. Utskriftssetningen er vesentlig mer kostbar enn multiplikasjonen og det er derfor rimelig å kalle den dominerende. Men hvor mange ganger utføres den? Antallet har åpenbart noe med logaritmen å gjøre siden vi får skrevet ut 10 potenser når n = 1000. Vi ser også at hvis n = 1023, vil vi fortsatt få 10 potenser, men hvis n = 1024 vil det bli skrevet ut 11. Hvis n = 1, får vi kun ut tallet 1. Dette forteller oss at antallfunksjonen (arbeidsmengden) må være $f(n) = \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$ eller $f(n) = \lceil \log_2 (n + 1) \rceil$ om en vil. Siden dette er en logaritmisk funksjon vil algoritmen være av *logaritmisk orden*.

Eksempel 3 Flg. metode finner summen av verdiene i en heltallstabell:

```
public static int tabellSum(int[] a)
{
  if (a.length == 0) throw new IllegalStateException("Ingen verdier!");

  int sum = a[0];
  for (int i = 1; i < a.length; i++) sum += a[i];

  return sum;
}
```

La tabellen a i *Eksempel* 3 ha lengde n. Setningen `sum += a[i]` utføres nøyaktig $n - 1$ ganger. Her blir det hipp som happ om det er tabelloperasjonen eller addisjonen som kalles dominerende. Addisjonen utføres nøyaktig $n - 1$ ganger, mens tabelloperasjonen utføres n ganger siden den også inngår i setningen `int sum = a[0]`. Hvis vi kaller addisjonen dominerende, blir funksjonen for arbeidsmengden lik $f(n) = n - 1$, dvs. en lineær funksjon (et 1. grads polynom i n). Algoritmen er dermed av *lineær orden*.

Eksempel 4 En av de sorteringsmetodene vi har sett på tidligere kalles *utvalgssortering*. Metoden kan kodes på flere måter, f.eks. slik:

```
public static void utvalgssortering(int[] a)
{
  for (int k = a.length; k > 1; k--)
  {
    int m = 0, maksverdi = a[0];

    for (int i = 0; i < k; i++)
      if (a[i] > maksverdi) { maksverdi = a[i]; m = i; }

    Tabell.bytt(a,m,k-1);
  }
}
```

I *Eksempel* 4 er det sammenligningen `if (a[i] > maksverdi)` som er dominerende. La tabellen *a* ha *n* verdier. I første runde finner vi den største verdien i intervallet *a*[0:*n*> og til det trengs $n - 1$ sammenligninger. Så flyttes den største verdien bakerst ved en ombytting. I neste runde finner vi den største verdien i *a*[0:$n - 1$>, dvs. den nest største verdien i *a*. Til det trengs $n - 2$ sammenligninger. Så flyttes den nest bakerst. Osv. Legger vi sammen blir det $n - 1 + n - 2 + \cdots + 3 + 2 + 1$ sammenligninger. Dette er en aritmetisk rekke med sum lik $\frac{1}{2}n(n - 1) = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$. Legg merke til at vi alltid får dette antallet uansett hva slags verdier *a* måtte ha og hvordan de er fordelt i tabellen. Arbeidsmengden er med andre ord kun avhenig av tabellens størrelse *n*. I antallfunksjon $f(n) = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$ er n^2 det dominerende leddet. Utvalgssorteringen er derfor av *kvadratisk orden*.

Oppgaver til Avsnitt 1.8.3

Gitt flg. metoder:

```
public static int sum1(int n)
{
  int sum = 0;
  int v = 1, h = n ;

  while (v < h) sum += v++ + h--;
  if (n % 2 != 0) sum += n/2;

  return sum;
}

public static int sum2(int n)
{
  int sum = 0;
  for (int i = 0; i < n; i++)
  {
    for (int j = 0; j < i; j++)  sum++;
  }
  return sum;
}

public static int sum3(int n)
{
  int sum = 0;
  for (int i = 0; i < n; i++)
  {
    for (int j = n; j > i; j--) sum++;
  }
  return sum;
}

public static int sum4(int n)
{
  int sum = 0;
  for (int i = 1; i <= n; i *= 2)
  {
    for (int j = 0; j < n; j++) sum++;
  }
  return sum;
}
```

```
public static int antallA(String s)
{
  int antall = 0;
  int n = s.length();

  for (int i = 0; i < n; i++)
  {
    char c = s.charAt(i);
    if (c == 'A' || c == 'a')
    antall++;
  }
  return antall;
}

public static int[][]
produkt(int[][] a, int[][] b)
{
  int n = a.length;
  int[][] c = new int[n][n];

  for (int i = 0; i < n; i++)
  {
    for (int j = 0; j < n; j++)
    {
      int sum = 0;
      for (int k = 0; k < n; k++)
      {
        sum += a[i][k]*b[k][j];
      }
      c[i][j] = sum;
    }
  }
  return c;
}
```

1. Metoden *sum*1 summerer tallene fra 1 til *n*. La *addisjon* være dominerende operasjon. Finn en funksjon $f(n)$ som gir antallet ganger den utføres. Ta kun med de addisjonene som summerer, dvs. += og +, men ikke den som øker tellevariabelen v (++).
2. Finn, for hver av de tre metodene *sum*2, *sum*3 og *sum*4, funksjoner $f(n)$ som gir antallet ganger addisjonen sum++ utføres. Se *Eksempel* 2 i tilfellet *sum*4.
3. I metoden *antallA* er *n* lik lengden til strengen *s*. Metoden finner antall forekomster av bokstaven A (stor eller liten) i tegnstrengen *s*. Hvilken operasjon kan en si er dominerende? Finn en funksjon $f(n)$ som gir antallet ganger den utføres.
4. Metoden *produkt* multipliserer to $n \times n$ - matriser. Finn en funksjon $f(n)$ som gir antallet multiplikasjoner som utføres. Lag kode som bruker *produkt*-metoden.
5. Lag en metode som returnerer antallet desimale siffer i et ikke-negativt heltall *n*. Det kan løses ved fortløpende divisjon med 10. Hva blir dominerende operasjon? Finn en formel (en funksjon av *n*) som gir antallet ganger den dominerende operasjonen utføres.

1.8.4 Gjennomsnittlig arbeidsmengde og orden

I eksemplene *Avsnitt* 1.8.3 fant vi, som funksjon av størrelsen n, hvor mange ganger den dominerende operasjonen ble utført. Dvs. en formel for arbeidsmengden. Vi fant disse funksjonene:

1. $f(n) = 1$
2. $f(n) = \lceil \log_2(n+1) \rceil$
3. $f(n) = n - 1$
4. $f(n) = \frac{1}{2}n(n-1) = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$

I de fire eksemplene var formlene kun avhengig av n og ikke avhengig av hva slags verdier som ble behandlet og hvordan de var fordelt. Men dette er egentlig ikke det normale. I mange algoritmer, f.eks. algoritmer som arbeider i tabeller, vil arbeidsmengden i tillegg til å være avhengig tabellstørrelsen n, også være avhengig hva slags verdier tabellen har.

Eksempel 1 Flg. metode sjekker om en gitt *verdi* ligger i en (usortert) heltallstabell. Hvis den ligger i tabellen returneres verdiens posisjon (indeks) og hvis ikke returneres −1:

```
public static int søkUsortert(int[] a, int verdi)
{
  for (int i = 0; i < a.length; i++)
  {
    if (verdi == a[i]) return i;    // verdi funnet
  }

  return -1;   // verdi ikke funnet
}
```

I *Eksempel* 1 er det naturlig å se på sammenligningen `verdi == a[i]` som dominerende operasjon. Minst arbeid blir det hvis *verdi* ligger først i tabellen *a*. Da returnerer metoden etter å ha utført nøyaktig én sammenligning. Mest arbeid blir det hvis *verdi* enten ligger som siste element i *a* eller hvis den ikke ligger der i det hele tatt. Da returnerer metoden etter å ha utført nøyaktig n sammenligninger der n er tabellens lengde.

For å finne gjennomsnittlig arbeidsmengde er det nødvendig å gjøre noen forutsetninger. Vi antar for det første at alle verdiene i *a* er forskjellige, så at alle verdiene blir søkt etter med samme sannsynlighet og til slutt at *a* inneholder verdien det søkes etter. Ligger *verdi* først blir det 1 sammenligning, 2 sammenligninger hvis den ligger nest først, osv. Til slutt hvis den ligger bakerst blir det n sammenligninger. Tilsammen $1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$ sammenligninger. Gjennomsnittet får vi ved å dele på n. Med andre ord $\frac{1}{2}(n+1)$ sammenligninger i gjennomsnitt med hensyn på de gitte forutsetningene.

I *Eksempel* 1 over så vi at algoritmens arbeidsmengde (antall dominerende operasjoner) var avhengig av både hvor den søkte verdien lå i tabellen og av tabellens størrelse. Vi innfører flg. tre begreper for en algoritmes arbeidsmengde:

1. Arbeidsmengde i det beste tilfellet
2. Gjenomsnittlig arbeidsmengde
3. Arbeidsmengde i det mest ugunstige (verste) tilfellet

Det beste tilfellet i *Eksempel* 1 (verdien lå først) gav en arbeidsmengde på $f(n) = 1$. Gjennomsnittet (under de gitte forutsetningene) ble $f(n) = \frac{1}{2}(n+1)$. Arbeidsmengden i det «verste» tilfellet (verdien lå bakerst eller var ikke der i det hele tatt) ble $f(n) = n$. Dvs. *konstant orden* i det beste tilfellet og *lineær orden* i gjennomsnitt og i det verste tilfellet.

Det er arbeidsmengden i det mest ugunstige tilfellet og den gjennomsnittlige arbeidsmengden som har mest interesse. I mange algoritmer kan det være gradsforskjeller mellom disse. Dette gjelder f.eks. den viktige sorteringsalgoritmen *kvikksortering* som vi skal analysere nærmere et annet sted. Den er gjennomsnittlig svært effektiv (*lineæritmisk* orden), men ineffektiv (*kvadratisk* orden) i de mest ugunstige tilfellene.

Eksempel 2 Flg. metode undersøker om en heltallstabell er sortert stigende eller ikke:

```
public static boolean erSortert(int[] a)
{
  for (int i = 1; i < a.length; i++)
    if (a[i-1] > a[i]) return false;  // ikke sortert stigende

  return true;  // a er sortert stigende
}
```

Her er operasjonen `a[i-1] > a[i]` dominerende. La a ha lengde n. Det mest «ugunstige» tilfellet får vi hvis alle verdiene (eller alle bortsett fra den siste) er sortert. Da vil sammenligningen bli utført $n - 1$ ganger. Men hva blir gjennomsnittet? For å kunne avgjøre det må vi som vanlig gjøre en del forutsetninger. Vi antar at a inneholder permutasjoner av tallene fra 1 til n og at hver permutasjon har samme sannsynlighet.

Hvis a inneholder tallene 1 og 2, vil det bli én sammenligning uansett. Gjennomsnittet blir 1. Hvis a inneholder en av de 6 permutasjonene av tallene fra 1 til 3, ser vi fort at for tre av dem blir det utført to og for de tre øvrige kun én sammenligning. Det gir 9/6 = 3/2 = 1 + 1/2 som gjennomsnitt. Ser vi på de 24 permutasjonene av tallene fra 1 til 4, finner vi at gjennomsnittet blir 40/24 = 10/6 = 1 + 1/2 + 1/6. Det lar seg vise (se *Avsnitt* 1.8.6) at hvis a inneholder tallene fra 1 til n, vil det gjennomsnittlige antallet ganger operasjonen `a[i-1] > a[i]` utføres være gitt ved:

$$f(n) = 1 + 1/2! + 1/3! + \cdots + 1/(n-1)! \approx e - 1$$

Summen over er de $n - 1$ første leddene i en kjent rekkeutvikling av tallet $e - 1$. Rekken konvergerer svært raskt. Vi har $e - 1 = 1{,}718281828\cdots$, men for oss er en avrunding til 1,7 godt nok. Dermed er den gjennomsnittlige arbeidsmengden for metoden *erSortert* konstant og tilnærmet lik 1,7. Med andre ord er dette et eksempel på en algoritme der det er gradsforskjell mellom arbeidsmengden i det mest ugunstige tilfellet ($f(n) = n - 1$, lineær orden) og den gjennomsnittlige arbeidsmengden ($f(n) \approx 1{,}7$, konstant orden).

Eksempel 3 I *Delkapittel* 1.1 fant vi posisjonen til den største verdien i en tabell:

```
public static int maks(int[] a)
{
  int m = 0;                    // indeks til største verdi
  int maksverdi = a[0];         // største verdi

  for (int i = 1; i < a.length; i++) if (a[i] > maksverdi)
  {
    maksverdi = a[i];           // største verdi oppdateres
    m = i;                      // indeks til største verdi oppdateres
  }
  return m;          // returnerer indeks/posisjonen til største verdi
}
```

Sammenligningen `a[i] > maksverdi` er dominerende operasjon i *Eksempel* 3 og den utføres alltid $n - 1$ ganger. Dvs. metoden er av lineær orden. Her kan det også være av interesse å

finne antallet ganger en ikke-dominerende operasjon utføres. Hvis `a[i] > maksverdi` i *Eksempel* 3 er *sann*, vil også variablene *maksverdi* og *m* bli oppdatert. Hvor mange ganger skjer det? Færrest antall ganger, dvs. 0 ganger, blir det hvis den største verdien ligger først. Det «verste» tilfellet, dvs. flest antall ganger, blir det hvis verdiene i *a* er forskjellige og er sortert stigende. Da blir det $n - 1$ oppdateringer.

I *Avsnitt* 1.1.6 fant vi at `a[i] > maksverdi` var *sann* (forutsatt at alle verdiene i *a* var forskjellige) gjennomsnittlig $1/2 + 1/3 + \cdots + 1/n = H_n - 1$ ganger. Men $H_n \approx \log(n) + 0{,}577$ og dermed $H_n - 1 \approx \log(n) - 0{,}423$. Med andre ord vil oppdateringen av *maksverdi* og *m* i gjennomsnitt bli utført $\log(n) - 0{,}423$ ganger.

Tilsammen får vi at arbeidmengden for oppdateringene av *maksverdi* og *m* i *Eksempel* 3 er konstant (lik 0) i det beste tilfellet, lik $\log(n) - 0{,}423$ i gjennomsnitt og lik $n - 1$ i det verste tilfellet. Dette er igjen et eksempel på at det kan være gradsforskjeller mellom antall ganger en operasjon utføres i en algoritme når det gjelder beste tilfelle, i gjennomsnitt og i verste tilfelle. Med f.eks. $n = 100.000$, blir $\log(n) - 0{,}423 \approx 11{,}1$, mens $n - 1 = 99999$.

Eksempel 4 I *Avsnitt* 1.3.12 så vi på en sorteringsmetode med navnet *innsettingssortering*. Den er også et eksempel på at det er forskjell i arbeidsmengden i de tre tilfellene: best, gjennomsnitt og verst. Koden ser slik ut:

```
public static void innsettingssortering(int[] a)
{
  for (int i = 1; i < a.length; i++)
  {
    int temp = a[i];  // flytter a[i] til en hjelpevariabel

    // verdier flyttes inntil rett sortert plass i a[0:i> er funnet
    int j = i-1; for (; j >= 0 && temp < a[j]; j--) a[j+1] = a[j];

    a[j+1] = temp;  // verdien settes inn på rett sortert plass
  }
}
```

Vi fant flg. formeler for arbeidsmengde:

- Best: $f(n) = n - 1$ når tabellen er sortert stigende, lineær orden
- Gjennomsnitt: $f(n) = \frac{1}{4}n(n + 3) - H_n$, kvadratisk orden
- Verst: $f(n) = \frac{1}{2}n(n - 1)$ når tabellen er sortert avtagende, kvadratisk orden

Innsettingssorteringen er av kvadratisk orden både i gjennomsnitt og i det verste tilfellet. Formelene sier imidlertid at det utføres dobbelt så mange sammenligninger i det verste tilfellet som det gjør i gjennomsnitt.

Oppgaver til Avsnitt 1.8.4

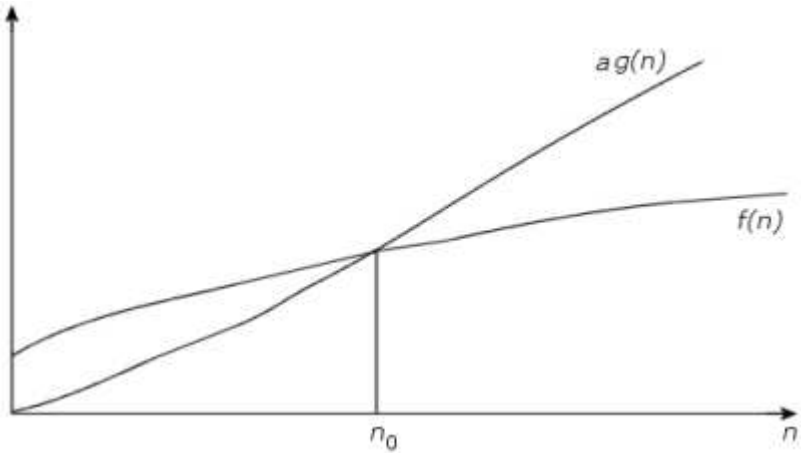
1.
```
public static void boblesortering(int[] a)
{
  for (int i = a.length; i > 0; i--)
    for (int j = 1; j < i; j++)
      if (a[j - 1] > a[j]) bytt(a, j - 1, j);
}
```
   Hvilken orden har *boblesortering* i det beste, i gjennomsnitt og i det verste tilfellet?

1.8.5 Notasjon med O, Ω og Θ

Avsnitt 1.8.2 har en tabell med funksjonstyper rangert etter asymptotisk «oppførsel». Der ble det sagt at jo høyere opp i tabellen er funksjon står, jo «mindre» er den asymptotisk sett. I dette avsnittet skal vi definere dette på en mer formell måte.

> **O-notasjon, asymptotisk øvre grense** La f og g være to reelle funksjoner definert for reelle tall. Da sies f å være $O(g)$ (leses som O av g) hvis det finnes to faste tall (konstanter) a og n_0 slik at $|f(n)| \leq a|g(n)|$ for alle $n \geq n_0$.

Hva betyr det at f er $O(g)$? I $|f(n)| \leq a|g(n)|$ inngår det tallverditegn. Men i praksis vil funksjoner i algoritmeanalyse være positive for aktuelle verdier av argumentet n. I så fall kan vi droppe tallverdier. Under har vi tegnet grafen til funksjonen $f(n)$ og den funksjonen vi får ved å gange $g(n)$ med en positiv konstant a. Det er laget slik at grafene skjærer hverandre for $n = n_0$. Dermed ligger grafen til $f(n)$ under grafen til $a\,g(n)$ for verdier av n til høyre for n_0. Kravet i definisjonen er med andre ord oppfylt og vi kan si at f er $O(g)$. En annen måte å uttrykke dette på er å si at g er en *asymptotisk øvre grense* for f.



Figur 1.8.5 a): Grafene til $f(n)$ og $a\,g(n)$ skjærer hverandre i n_0

De to konstantene a og n_0 er ikke entydige. Finnes det først et slikt par, finnes det uendelig mange. Tallet n_0 må ikke nødvendigvis stå for et skjæringspunkt. Poenget er at fra n_0 og utover skal grafen til $f(n)$ ligge under grafen til $a\,g(n)$. Dermed kunne n_0 gjerne velges lenger til høyre enn der den står i *Figur* 1.8.5 *a)*. I mange tilfeller kan a velges lik 1. Men generelt gjelder at jo større verdi på a, jo mindre verdi kan vi velge for n_0. Hadde vi valgt en enda større a i *Figur* 1.8.5 *a)*, ville grafen til $a\,g(n)$ blitt brattere og dermed krysset grafen til $f(n)$ lenger til venstre.

Eksempel 1 La $g(n) = n^2$ og $f(n) = 3n^2 + 5n + 10$. Vi skal vise at f er $O(g)$. Både f og g er positive funksjoner. Derfor kan vi se bort fra tallverditegnet. Vi har $4^2 = 16$. Dermed gjelder spesielt at $n^2 \geq 10$ for $n \geq 4$. Videre har vi at hvis $n \geq 1$, så er $n^2 \geq n$ og dermed $5n^2 \geq 5n$. Men hvis $n \geq 4$, så er allerede $n \geq 1$. Dermed får vi, hvis $n \geq 4$, at

$$3n^2 + 5n + 10 \leq 3n^2 + 5n^2 + n^2 = 9n^2.$$

Derfor blir $f(n) \leq a\,g(n)$ for $n \geq n_0$ hvis vi velger $a = 9$ og $n_0 = 4$. Som nevnt over er ikke a og n_0 entydige. La $a = 18$. Vi har $f(1) = 18$ og $18\,g(1) = 18$. Grafene til f og $18\,g$ er parabler. De to skjærer hverandre for $n = 1$ og til høyre for 1 må dermed grafen til f ligge under grafen til $18\,g$. Med andre ord blir $f(n) \leq a\,g(n)$ for for alle $n \geq n_0$ hvis vi velger $a = 18$ og $n_0 = 1$.

Eksempel 2 For funksjonstypene i tabellen i *Avsnitt* 1.8.2 vil det være slik at f er $O(g)$ hvis f står høyere opp tabellen enn g. La for eksempel $f(n) = \log_2 n$ og $g(n) = \sqrt{n}$. Definér funksjonen h ved $h(n) = g(n) - f(n)$. Vi ser fort at $h'(n) = 1/(2\sqrt{n}) - 1/(n \ln 2)$ og at $h(n) = 0$ for $n = 4/(\ln 2)^2 \approx 8{,}33$. Det betyr spesielt at $h(n)$ er voksende for $n \geq 8{,}33$. Videre har vi at $h(16) = 0$ og av det følger at $h(n) \geq 0$ for $n \geq 16$. Med andre ord vil $|f(n)| \leq a\,|g(n)|$ for for alle $n \geq n_0$ hvis vi velger $a = 1$ og $n_0 = 16$.

Det finnes en serie formeler for O-notasjon. Her er noen av dem:

1. Anta at f er $O(g)$ og g er $O(h)$. Da vil f være $O(h)$.
2. Anta at f er $O(g)$ og at a er en konstant. Da vil af være $O(g)$.
3. Anta at både f_1 og f_2 er $O(g)$. Da vil $f_1 + f_2$ være $O(g)$.
4. Anta at f_1 er $O(g_1)$ og at f_2 er $O(g_2)$. Da vil $f_1 f_2$ være $O(g_1 g_2)$.

Det finnes også en Ω-notasjon som er den omvendte av O-notasjonen. Den er definert slik:

> **Ω-notasjon, asymptotisk nedre grense** La f og g være to reelle funksjoner definert for reelle tall. Da sies f å være $\Omega(g)$ hvis det finnes en positiv konstant a og en konstant n_0 slik at $|f(n)| \geq a|g(n)|$ for alle $n \geq n_0$.

Hvis begge er positive, betyr f er $\Omega(g)$ at grafen til f ligger over grafen til $a\,g$ for $n \geq n_0$.

O-notasjon og Ω-notasjon er som nevnt det omvendte av hverandre. Hvis f er $O(g)$, så vil g være $\Omega(f)$ og hvis f er $\Omega(g)$, så vil g være $O(f)$.

Til slutt har vi Θ-notasjon. Den er definert slik:

> **Θ-notasjon, asymptotisk «likhet»** La f og g være to reelle funksjoner definert for reelle tall. Da sies f å være $\Theta(g)$ hvis det finnes positive konstanter a_1, a_2 og en konstant n_0 slik at $a_1|g(n)| \leq |f(n)| \leq a_2|g(n)|$ for alle $n \geq n_0$.

Hvis både f og g er positive, betyr f er $\Theta(g)$ at grafen til f ligger mellom grafene til $a_1\,g$ og $a_2\,g$ for $n \geq n_0$. Det følger forøvrig av definisjonene at f er $\Theta(g)$ hvis og bare hvis f er $O(g)$ og g er $O(f)$. Dette betyr ikke at f og g er like. Men de oppfører seg på samme måte for store verdier av n og kalles derfor asymptotisk «like».

Eksempel 3 Funksjonene n^2, $2\,n^2$, $5\,n^2$ og $100\,n^2$ er alle asymptotisk «like».

Eksempel 4 $g(n) = n^2$ og $f(n) = 3n^2 + 5n + 10$ er asymptotisk «like».

Vi har tidligere sagt når det gjelder funksjonstypene i tabellen i *Avsnitt* 1.8.2, at jo høyere opp i tabellen er funksjon står, jo «mindre» er den asymptotisk sett. Vi kan nå definere begrepet asymptotisk «mindre enn» slik:

> **Asymptotisk «mindre enn»** Vi sier at funksjonen f er asymptotisk «mindre enn eller lik» funksjonen g hvis f er $O(g)$ og at f er asymptotisk «mindre enn» g hvis f er $O(g)$ uten at de er asymptotisk «like».

I *Avsnitt* 1.8.1 ble *arbeidsmengden* til en algoritme definert som antallet ganger algoritmens dominerende operasjon utføres. Hvis den oppgaven som algoritmen løser, har størrelse n, kan dette antallet ofte uttrykkes som en funksjon av n. Denne funksjonen ble det sagt definerer algoritmens orden. Dette kan nå gis en mer presis definisjon.

> **En algoritmes orden** Anta at arbeidsmngden til en algoritme er gitt som funksjonen $f(n)$. Hvis f er $\Theta(g)$, sier vi at algoritmen er av *orden* g.

Eksempel 5 I *Eksempel* 1.8.4.4 fant vi at for en heltallstabell med lengde n, ville algoritmen *innsettingssortering* i gjennomsnitt utføre $f(n) = \frac{1}{4}n^2 + \frac{3}{4}n - H_n$ sammenligninger. Nå vet vi at f er $\Theta(n^2)$. Med andre ord er algoritmen i gjennomsnitt av *orden* n^2 eller *kvadratisk orden*.

Oppgaver til Avsnitt 1.8.5

1. Bevis at hvis f er $O(g)$ og g er $O(h)$, så vil f være $O(h)$.
2. Bevis at hvis f er $O(g)$ og a er en konstant, så vil af være $O(g)$.
3. Bevis at hvis både f_1 og f_2 er $O(g)$, så vil $f_1 + f_2$ være $O(g)$.
4. Bevis at hvis f_1 er $O(g_1)$ og f_2 er $O(g_2)$, så vil $f_1 f_2$ være $O(g_1 g_2)$.

1.8.6 Analyse av metoden *erSortert*

I *Eksempel* 2 i *Avsnitt* 1.8.4 ble metoden *erSortert* diskutert. Den gjennomsnittlige arbeidsmengden ble påstått å være gitt ved $f(n) \approx 1{,}7$. Her kommer et bevis for dette.

Gitt at tabellen a inneholder en permutasjon av tallene fra 1 til n. La så k være et heltall slik at $1 \le k < n$. Da vil operasjonen `if (a[i-1] > a[i])` bli utført k ganger hvis de k første elementene i a er sortert, dvs. $a[0] < a[1] < a[2] < \ldots < a[k-1]$, men ikke de $k+1$ første, dvs. $a[k-1] > a[k]$. La $B(n,k)$ være binomialkoeffisienten. Da kan vi velge k sorterte tall først i en permutasjon på $B(n,k)$ måter og de siste $n-k$ tallene i permutasjonen kan velges på $(n-k)!$ måter. Dermed finnes det $B(n,k)\cdot(n-k)! = n!/k!$ permutasjoner der de k første elementene er sortert.

Antall permutasjoner der de k første er sortert, men ikke de $k+1$ første, er dermed gitt ved:

(1.8.6.1) $\quad (n!/k!) - (n!/(k+1)!) \quad = \quad n!\,(1/k! - 1/(k+1)!) \quad = \quad n!\,k/(k+1)!$

Sammenlagt for alle permutasjonen blir dermed `if (a[i-1] > a[i])` utført:

(1.8.6.2) $\quad n!\cdot[1(1 - 1/2!) + 2(1/2! - 1/3!) + \cdot\ \cdot\ \cdot + (n-1)(1/(n-1)! - 1/n!)] + n - 1$

ganger. Det siste leddet i summen (dvs. $n-1$) får vi fordi operasjonen blir utført $n-1$ ganger for den ene permutasjonen som har alle tallene sortert. Hvis vi regner litt på summen i (1.8.6.2) og deretter deler med $n!$ for å få gjennomsnittet, blir det flg. resultat:

(1.8.6.3) $\quad 1 + 1/2! + 1/3! + \cdot\ \cdot\ \cdot + 1/(n-1)!$

Summen i (1.8.6.3) er de $n-1$ første leddene i en kjent rekkeutvikling av tallet $e-1$. Denne rekken konvergerer svært raskt. Vi har $e - 1 = 1{,}718281828\ldots$ og allerede for $n = 6$ blir summen lik 1,717. For vårt formål er en avrunding til 1,7 godt nok. Dermed kan vi si at gjennomsnittlig arbeidsmengde er gitt ved $f(n) = 1{,}7$.