❑ Partisjonering - antall ombyttinger

Partisjoneringen i *Programkode* 1.3.9 *a)* deler eller partisjonerer tallene i en heltallstabell i to. Delingen skjer med hensyn på en *skilleverdi* med det resultatet at første del av tabellen vil bestå av de tallene som er mindre enn skillverdien og andre del av resten, dvs. av de som er større enn eller lik skilleverdien.

Vi skal for enkelhets skyld tenke oss at tabellen inneholder en permutasjon av tallene fra 1 til n og at skilleverdien s er lik en av disse tallene. *Setning* 1.3.9 *a)* sier hvor mange ombyttinger som uføres når en gitt permutasjon partisjoneres:

> *La en tabell inneholde en vilkårlig permutasjon av tallene fra 1 til n og la s være lik et av dem. Da vil antallet tall blant de s* − 1 *første som ikke er mindre enn s, være det samme som antallet ombyttinger med s som skilleverdi i partisjoneringsalgoritmen.*

La s være lik et av tallene fra 1 til n og k et ikke-negativt heltall. La $A(n,s,k)$ være antallet forskjellige permutasjoner av tallene fra 1 til n der nøyaktig k av tallene blant de $s - 1$ i første i permutasjonen ikke er mindre enn s. Vi finner tabeller som inneholder slike permutasjoner ved å velge alle mulige utvalg på k blant de $s - 1$ første plassene tabellen, så velge et tilfeldig utvalg på k blant de $n - s + 1$ tallene som ikke er mindre enn s, deretter permutere disse utvalgene på alle mulige måter og plassere dem på de valgte plassene i tabellen. Antall måter dette kan gjøres på, er gitt ved flg. binomialuttrykk:

(1) $$\binom{s-1}{k}\binom{n-s+1}{k}k!$$

De resterende plassene blant de $s - 1$ første i tabellen, dvs. $s - 1 - k$ plasser, skal fylles med et tilfeldig utvalg på $s - 1 - k$ blant de $s - 1$ tallene som er mindre enn s og hvert slikt utvalg kan permuteres på alle mulige måter. Resten av dem, dvs. de $n - s + 1$ som ennå ikke er valgt ut, skal plasseres på alle mulige måter på de $n - s + 1$ siste plassene i tabellen. Sammenlagt betyr dette at

(2) $$A(n,s,k) = \binom{s-1}{k}\binom{n-s+1}{k}k!\binom{s-1}{s-1-k}(s-1-k)!(n-s+1)!$$

Vi kan forenkle dette ved å bruke at

(3) $$k!\binom{s-1}{s-1-k}(s-1-k)! = \frac{k!(s-1)!(s-1-k)!}{k!(s-1-k)!} = (s-1)!$$

Dermed får vi

(4) $$A(n,s,k) = \binom{s-1}{k}\binom{n-s+1}{k}(s-1)!(n-s+1)!$$

La $A(n,s)$ være det sammenlagte antallet ombyttinger for alle forskjellige permutasjoner med s fast som skilleverdi. Hvis det er k tall blant de $s - 1$ første som ikke er mindre enn s, blir det k ombyttinger. Dermed

(5) $$A(n,s) \;=\; \sum_k k\binom{s-1}{k}\binom{n-s+1}{k}(s-1)!(n-s+1)!$$

De to bakerste faktorene er uavhengige av summasjonsvariabelen k og kan derfor flyttes utenfor summen. I *Formel* G.2.8 i *Vedlegg* G kan vi erstatte m med $s - 1$ og n med $n - s + 1$ og dermed få

(6) $$\sum_k k\binom{s-1}{k}\binom{n-s+1}{k} \;=\; (s-1)\binom{n-1}{s-1}$$

Det gjennomsnittlige antallet ombyttinger med s som fast skilleverdi blir

(7) $$\frac{A(n,s)}{n!} \;=\; \frac{s-1}{n!}\binom{n-1}{s-1}(s-1)!(n-s+1)! \;=$$

$$\frac{(s-1)(n-1)!(s-1)!(n-s+1)!}{n!(s-1)!(n-s)!} \;=\; \frac{(s-1)(n-s+1)}{n}$$

Det gjennomsnittlige antallet ombyttinger (over s fra 1 til n) er gitt ved

(8) $$\frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n}\frac{(s-1)(n-s+1)}{n} \;=\; \frac{1}{n^2}\sum_{s=1}^{n}(s-1)(n-s+1)$$

Den siste summen i (8) kan vi finne ved å bruke *Formel* G.1.5 i *Vedlegg* G. Hvis k i formelen erstattes med $s - 1$ får vi

(9) $$\frac{1}{n^2}\sum_{s=1}^{n}(s-1)(n-s+1) \;=\; \frac{n(n^2-1)}{6n^2} \;=\; \frac{n^2-1}{6n}$$

Konklusjon:

Det gjennomsnittlige antallet ombyttinger i algoritmen for partisjonering i *Programkode* 1.3.9 *a)*, der gjennomsnittet er over alle permutasjoner av tallene fra 1 til n og over alle skilleverdier s fra 1 til n, er eksakt lik $(n^2 - 1)/6n$.