Diskret matematikk – høsten 2014 – løsningsforslag 2. oblig

Oppgave 1

a) *i)* Dette er en aritmetisk rekke siden differensen mellom et ledd og det foregående leddet er fast lik 2 .

ii) $a_0 = 5$, $a_n = 5 + 2n$

iii) Indeks til siste ledd: Finn n slik at $5 + 2n = 99$. Det gir $n = \frac{99-5}{2} = 47$. Dermed $N = 47$. Rekken har 1 + 47 = 48 ledd.

iv) Summen er gitt ved $\frac{(5+99)\cdot 48}{2} = 2496$

b) *i)* Dette er en geometrisk rekke siden forholdet (brøken) mellom et ledd og det foregående leddet er fast lik –2 .

ii) $a_0 = 1$, $a_n = (-2)^n$

iii) Indeks til siste ledd: Finn n slik at $(-2)^n = 1024$. Vi ser med en gang at n = 10. Dermed er N = 10. Rekken har 1 + 10 = 11 ledd.

iv) Summen er gitt ved $\sum_{n=0}^{10}(-2)^n = \frac{(-2)^{11}-1}{-2-1} = \frac{-2048-1}{-3} = \frac{2049}{3} = 683$.

c) *i)* Dette er en aritmetisk rekke siden differensen mellom et ledd og det foregående leddet er fast lik 4.

ii) $a_0 = 10$, $a_n = 10 + 4n$

iii) Indeks til siste ledd: Finn n slik at $10 + 4n = 94$. Det gir $n = \frac{94-10}{4} = 21$ og dermed $N = 21$. Rekken har 1 + 21 = 22 ledd.

iv) Summen er gitt ved $\frac{(10+94)\cdot 22}{2} = 1144$.

d) *i)* Dette er en geometrisk rekke siden forholdet (brøken) mellom et ledd og det foregående leddet er fast lik ½ .

ii) $a_0 = \frac{1}{2}$, $a_n = \frac{1}{2}(\frac{1}{2})^n$

iii) Indeks til siste ledd: Finn n slik at $\frac{1}{2}(\frac{1}{2})^n = \frac{1}{64}$ eller $(\frac{1}{2})^n = \frac{1}{32}$. Vi ser med en gang at n må være lik 5. Dermed N = 5. Rekken har 1 + 5 = 6 ledd.

iv) Summen er gitt ved $\sum_{n=0}^{5}\frac{1}{2}(\frac{1}{2})^n = \frac{1}{2}\frac{(\frac{1}{2})^6-1}{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}\frac{\frac{1}{64}-1}{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\frac{-\frac{63}{64}}{-\frac{1}{2}} = \frac{63\cdot 2}{2\cdot 64} = \frac{63}{64}$.

Oppgave 2

$A+B$ er ikke definert!

$$B+C=\begin{bmatrix}-2+2 & 1+1 & 3+(-1)\\ 4+(-1) & 3+0 & -2+3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 2 & 2\\ 3 & 3 & 1\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}3\cdot(-2)+(-1)\cdot 4 & 3\cdot 1+(-1)\cdot 3 & 3\cdot 3+(-1)\cdot(-2)\\ 1\cdot(-2)+2\cdot 4 & 1\cdot 1+2\cdot 3 & 1\cdot 3+2\cdot(-2)\\ 0\cdot(-2)+(-3)\cdot 4 & 0\cdot 1+(-3)\cdot 3 & 0\cdot 3+(-3)\cdot(-2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-10 & 0 & 11\\ 6 & 7 & -1\\ -12 & -9 & 6\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}(-2)\cdot 3+1\cdot 1+3\cdot 0 & (-2)\cdot(-1)+1\cdot 2+3\cdot(-3)\\ 4\cdot 3+3\cdot 1+(-2)\cdot 0 & 4\cdot(-1)+3\cdot 2+(-2)\cdot(-3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5 & -5\\ 15 & 8\end{bmatrix}$$

$$A^T=\begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\ -1 & 2 & -3\end{bmatrix}$$

Oppgave 3

$$A\vee B=\begin{bmatrix}1\vee 1 & 1\vee 0 & 1\vee 1\\ 1\vee 0 & 0\vee 1 & 1\vee 0\\ 1\vee 1 & 1\vee 0 & 1\vee 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix} \quad A\wedge B=\begin{bmatrix}1\wedge 1 & 1\wedge 0 & 1\wedge 1\\ 1\wedge 0 & 0\wedge 1 & 1\wedge 0\\ 1\wedge 1 & 1\wedge 0 & 1\wedge 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$A\odot B=\begin{bmatrix}(1\wedge 1)\vee\cdot\cdot\cdot & (1\wedge 0)\vee(1\wedge 1)\vee\cdot\cdot\cdot & (1\wedge 1)\vee\cdot\cdot\cdot\\ (1\wedge 1)\vee\cdot\cdot\cdot & (1\wedge 0)\vee(0\wedge 1)\vee(1\wedge 0) & (1\wedge 1)\vee\cdot\cdot\cdot\\ (1\wedge 1)\vee\cdot\cdot\cdot & (1\wedge 0)\vee(1\wedge 1)\vee\cdot\cdot\cdot & (1\wedge 1)\vee\cdot\cdot\cdot\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$B^{[2]} = B\odot B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Oppgave 4

a) Kvotient q = 44 div 8 = 5, Rest r = 44 mod 8 = 4
b) Kvotient q = 777 div 21 = 37, Rest r = 777 mod 21 = 0
c) Kvotient q = 7 div 17 = 0, Rest r = 7 mod 17 = 7
d) Kvotient q = 0 div 17 = 0, Rest r = 0 mod 17 = 0
e) Kvotient q = 1234567 div 101 = 12223, Rest r = 1234567 mod 101 = 44

Oppgave 5

a) $3 \equiv 17 \pmod 7$ er sant siden 7 går opp i 3 – 17 = –14, $43 \equiv 7 \pmod{11}$ er ikke sant siden 11 ikke går opp i 43 – 7 = 36.

b) Vi skal finne fem forskjellige tall a slik at $a \equiv 7 \pmod 5$. Hvis vi finner ett, kan vi finne flere ved å legge til 5. F.eks. er a = 2 et slik tall siden 5 går opp i 2 – 7 = –5. Da får vi også tallene 2 + 5 = 7, 7 + 5 = 12, 12 + 5 = 17 og 17 + 5 = 22. Det gir de fem tallene 2, 7, 12, 17 og 22.

c) Tverrsummen til 5937 er 5 + 9 + 3 + 7 = 24 og tverrsummen til 24 er 2 + 4 = 6. Tverrsummen til 65846 er 6 + 5 + 8 + 4 + 6 = 29, tverrsummen til 29 er 2 + 9 = 11 og tverrsummen til 11 er 1 + 1 = 2. Tverrsummen til $6 \cdot 2 = 12$ er lik 1 + 2 = 3.

Tverrsummen til 390927602 er 3 + 9 + 0 + 9 + 2 + 7 + 6 + 0 + 2 = 38, tverrsummen til 38 er 3 + 8 = 11 og tverrsummen til 11 er 1 + 1 = 2. Det betyr at 390927602 **ikke** kan være lik produktet av 5937 og 65846.

Tverrsummen til 390927702 er 39, tverrsummen til 39 er 3 + 9 = 12 og tverrsummen til 12 er 1 + 2 = 3. Det betyr at 390927702 kan være lik produktet av 5937 og 65846.

Tverrsummen til 390927802 er 40 og tverrsummen til 40 er 4 + 0 = 4. Det betyr at 390927802 **ikke** kan være lik produktet av 5937 og 65846.

d) *i)* ISBN-13 for læreboken er 978-0-07-131501-2. Da får vi (9 + 8 + 0 + 1 + 1 + 0 + 2) + 3(7 + 0 + 7 + 3 + 5 + 1) = 21 + $3 \cdot 23$ = 90. Det stemmer at $90 \equiv 0 \pmod{10}$.

ii) Vi får (9 + 8 + 0 + 3 + 0 + 7 + x) + 3(7 + 0 + 7 + 2 + 6 + 9) = 27 + x + $3 \cdot 31$ = x + 120. Velger vi x = 0, vil vi få en lovlig ISBN-13.

Oppgave 6

a)

4027	2013	1006	503	251	125	62	31	15	7	3	1	0
2	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1

Binær form: $4027_{10} = 111110111011_2$

Heksadesimal form: $111110111011_2 = 1111\ 1011\ 1011_2 = FBB_{16}$

Oktal form: $111110111011_2 = 111\ 110\ 111\ 011_2 = 7673_8$

b) Binær form: $A = 1010 \quad 1 = 0001 \quad B = 1011 \quad 2 = 0010 \quad C = 1100 \quad 3 = 0011$
$A1B2C3_{16} = 101000011011001011000011_2$

Oktal form: $A1B2C3_{16} = 101 \quad 000 \quad 011 \quad 011 \quad 001 \quad 011 \quad 000 \quad 011_2 \quad = \quad 50331303_8$

Desimal form: $A1B2C3_{16} = 3 + C \cdot 16 + 2 \cdot 16^2 + B \cdot 16^3 + 1 \cdot 16^4 + A \cdot 16^5 = 10597059_{10}$

c) Oktal form: $1010010001_2 = 1 \quad 010 \quad 010 \quad 001_2 \quad = \quad 1221_8$

Heksadesimal form: $1010010001_2 = 10 \quad 1001 \quad 0001_2 \quad = \quad 291_{16}$

Desimal form: $1010010001_2 \quad = \quad 291_{16} \quad = \quad 2 \cdot 16^2 + 9 \cdot 16 + 1 = 657_{10}$

Oppgave 7
a)

64	32	16	8	4	2	1	0
2	0	0	0	0	0	0	1

Med 8 biter får vi $64_{10} = 01000000_2$

123	61	30	15	7	3	1	0
2	1	1	0	1	1	1	1

Med 8 biter får vi $123_{10} = 01111011_2$

b) $64_{10} = 01000000_2$
Komplementet: 10111111_2
+ 1 gir 11000000_2

Tallet $-64_{10} = 11000000_2$ i fast bitformat på 8 biter og med to-komplement.

$123_{10} = 01111011_2$
Komplementet: 10000100_2
+ 1 gir 10000101_2

Tallet $-123_{10} = 10000101_2$ i fast bitformat på 8 biter og med to-komplement.

c) $64_{10} = 01000000_2$
+ $123_{10} = 01111011_2$

= $10111011_2 = -69_{10}$
=====================

d) $\quad -64_{10} = 11000000_2$

$+ \ (-123_{10} = 10000101_2)$

$= \quad (1)01000101_2 = 01000101_2 = 69_{10}$

================================

Oppgave 8

1) $\sum_{k=0}^{7} 6\cdot 16^k = 6\frac{16^8-1}{16-1} = \frac{2}{5}(16^8-1) = \frac{2}{5}4294967295 = 1717986918$

2)

$a = 101101101101101101101101101101_2 = 5555555555_8 = \sum_{j=0}^{9} 5\cdot 8^j = 5\frac{8^{10}-1}{8-1} = 766958445$

3)

$a = 01100110011001100110011001100110_2 = 66666666_{16} = \sum_{j=0}^{7} 6\cdot 16^j = 1717986918$

$b = 10011001100110011001100110011001_2 = 99999999_{16} = -1717986919_{10}$

For å finne b må en ta komplementet og så addere 1. Da får man et tall som er 1 mer enn a som er lik 1717986918 og dermed lik 1717986919. Dermed er b = –1717986919.

Oppgave 9

a) Den raskeste måten å finne primtallene fra 100 til 150 er faktisk å finne de som ikke er primtall. Vi har $\lfloor\sqrt{150}\rfloor = 12$ og dermed er 11 største mulige primtallsfaktor. Vi skriver først opp alle tallene fra 100 til 150. Så streker vi over alle partallene, så hvert tredje tall fra og med 102 (de er delelige med 3), så hvert femte tall fra og med 105 (de er delelige med 5), så hvert syvende tall fra og med 105 (de er delelige med 7) og til slutt hvert ellevte tall fra og med 110. Da står en igjen med de ti primtallene

101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149.

b) $25! = 25\cdot 24\cdot 23\cdot 22\cdot 21\cdot 20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16\cdot 15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$

$25 = 5^2,\ 24 = 2^3\cdot 3,\ 22 = 2\cdot 11,\ 21 = 3\cdot 7,\ 20 = 2^2\cdot 5,\ 18 = 2\cdot 3^2,\ 16 = 2^4,\ 15 = 3\cdot 5,$
$14 = 2\cdot 7,\ 12 = 2^2\cdot 3,\ 10 = 2\cdot 5,\ 9 = 3^2,\ 8 = 2^3,\ 6 = 2\cdot 3,\ 4 = 2^2$

Dermed $25! = 2^{22}\cdot 3^{10}\cdot 5^6\cdot 7^3\cdot 11^2\cdot 13\cdot 17\cdot 19\cdot 23$

c) Vi ser at 25! inneholder faktoren 5 sammenlagt 6 ganger og dermed faktoren 10 sammenlagt 6 ganger sider vi også har (minst) 6 2-ere. Det betyr at 25! har 6 nuller bakerst. Tallet 25! utregnet blir

$$15511210043330985984000000.$$

Oppgave 10

a) $72 = 2^3 \cdot 3^2$, $420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. Største felles divisor blir dermed $2^2 \cdot 3 = 12$.

b)

a	b	$r = a \bmod b$
420	72	60
72	60	12
60	12	0

Vi ser at største felles divisor blir 12.

c)

a	b	$r = a \bmod b$
53295	10920	9615
10920	9615	1305
9615	1305	480
1305	480	345
480	345	135
345	135	75
135	75	60
75	60	15
60	15	0

Vi ser at største felles divisor blir 15.