

Diskret matematikk – høsten 2014 – 2. obligatoriske oppgave

Innleveringsfrist fredag 17. oktober kl. 15

Samarbeid er tillatt. En gruppe på opptil 5 studenter kan levere en felles løsning. Navnene på de som står bak løsningen må stå ØVERST på første side. Skriv hele navnet og studentnummer og ikke bare fornavnet.

Løsningen kan leveres i en forelesning eller i en øvingstime. Den kan også leveres til faglærer på kontor PS436 (det vil stå en eske ved siden av kontordøren). Du kan skrive med penn eller blyant. Skriv slik at det er godt lesbart. **Alle svarene skal begrunnes!**

Obs: I flere av oppgavene kan du lage din egen fasit enten ved å lage Javakode eller ved å bruke kalkulatoren i Windows.

Oppgave 1

For følgende rekker skal du *i)* avgjøre hva slags type rekke det er, *ii)* finne det første leddet a_0 og generelle leddet a_n , *iii)* finne indeksen N til siste ledd slik at rekken blir lik $\sum_{n=0}^N a_n$ (det betyr at rekken har $N + 1$ ledd) og *iv)* finne summen av rekken ved hjelp av en formel:

- a) $5 + 7 + 9 + \dots + 97 + 99$
- b) $1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 \dots - 512 + 1024$
- c) $10 + 14 + 18 + 22 \dots + 86 + 90 + 94$
- d) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}$ (oppgi helst summen som et rasjonalt tall).

Oppgave 2

Gitt tallmatrisene $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ og $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Finn $A+B$, $B+C$, AB , BA og A^T .

Oppgave 3

Gitt de logiske matrisene $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Finn $A \vee B$, $A \wedge B$, $A \odot B$ og $B^{[2]}$.

Oppgave 4

Finn kvotienten q og resten r når:

- a) 44 deles med 8
- b) 777 deles med 21
- c) 7 deles med 17
- d) 0 deles med 17
- e) 1234567 deles med 101

I Oppgave 4 kan du teste svarene ved å bruke en vanlig lommekalkulator. Hvis du der deler et heltall med et annet heltall, blir resultatet et desimaltall hvis divisjonen ikke går opp. Da får du kvotienten ved å fjerne desimalene. Stiller du inn kalkulatoren i Windows på «Programmer» vil $/$ gi kvotienten og *Mod* resten.

Oppgave 5

- a) Avgjør om $3 \equiv 17 \pmod{7}$ er sant og om $43 \equiv 7 \pmod{11}$ er sant.
- b) Finn fem forskjellige heltall a slik at $a \equiv 7 \pmod{5}$.
- c) *Tverrrsummen* til et heltall a er lik summen av sifrene i a . Se de første sidene av forelesningsnotatene fra 3/10-2014. Der er også *gjentatt tverrrsum* definert. Bruk gjentatt tverrrsum til å avgjøre, uten å utføre gangestykket, hvilke av tallene 390927602, 390927702 og 390927802 som **ikke** kan være lik produktet $5937 \cdot 65846$.
- d) ISBN-13 (International Standard Book Number) er en tallkode med 12 siffer + et kontrollsiffer. De 13 sifrene deles opp i ulike grupper. ISBN for læreboken i Diskret matematikk er f.eks. 978-0-07-131501-2. De 12 første sifrene bestemmes av forlaget etter bestemte regler. La s_i være siffer nr. i . Da bestemmes det trettende sifferet, dvs. s_{13} , slik at

$$(s_1 + s_3 + s_5 + s_7 + s_9 + s_{11} + s_{13}) + 3 \cdot (s_2 + s_4 + s_6 + s_8 + s_{10} + s_{12}) \equiv 0 \pmod{10}$$

- i)* Sjekk at dette stemmer for ISBN for læreboken. *ii)* Hva må stå på x-ens plass for at 978-0-073-20679-x skal bli en lovlig ISBN?

Oppgave 6

- a) Finn 4027_{10} på binær form, oktal form og heksadesimal form.
- b) Finn $A1B2C3_{16}$ på binær form, oktal form og desimal form.
- c) Finn 1010010001_2 på oktal form, heksadesimal form og desimal form.

Test svarene i Oppgave 6. «Programmer»-kalkulatoren i Windows veksler mellom ulike formater. I Java oppgis tall på binærform ved å sette 0b først og så binære siffer, på oktal form med 0 først og så oktale siffer og på heksadesimal med 0x først og så heksadesimale siffer. Til utskrift av sifrene på ulike former kan du bruke metodene *toBinaryString*, *toOctalString* og *toHexString* i klassen *Integer*.

Oppgave 7

I denne oppgaven skal det brukes et fast bitformat på 8 biter, to-komplement og fortegnsbiter for representasjon av tall på binærform.

- Finn 64_{10} og 123_{10} på binær form.
- Finn -64_{10} og -123_{10} på binær form.
- Finn $64_{10} + 123_{10}$ på binær form ved hjelp av binæraddisjon og resultatet fra a). Hva blir summen på desimalform? (Husk at vi bruker 8 biter og to-komplement.)
- Finn $-64_{10} + (-123_{10})$ på binær form ved hjelp av binæraddisjon og resultatet fra b). Summen vil få 9 biter. Da er regelen, siden vi bruker 8 biter og to-komplement, at den 9-ende biten (den lengst til venstre) fjernes slik at resultatet blir på 8 biter. Hva blir så resultatet på desimalform?

Du bør teste svarene dine i Oppgave 7 før du leverer. Stiller du inn kalkulatoren i Windows på «Programmer», får du 8 biters format med Byte.

Oppgave 8

- Finn summen av den geometriske rekken $\sum_{k=0}^7 6 \cdot 16^k$.
- Finn flg. tall på oktal form og så på desimal form:

$$a = 101101101101101101101101101101_2.$$

- I resten av oppgaven skal vi bruke et fast bitformat på 32 biter, to-komplement og fortegnsbiter for representasjon av tall på binærform (slik det er for datatypen *int* i Java). Flg. to tall (med 32 biter) er gitt:

$$a = 01100110011001100110011001100110_2$$

$$b = 10011001100110011001100110011001_2$$

Finn a og b på heksadesimal form og på desimal form. Obs: Tallet b er negativt siden det har 1 som fortegnsbiter. På heksadesimal form brukes *fortegnssiffer*. Fortegnssiffer fra 8 til F gir negativt tall, På desimalform brukes vanlig fortegn (dvs. -).

Du bør teste svarene dine i Oppgave 8 før du leverer. Stiller du inn kalkulatoren i Windows på «Programmer», får du 32 biters format med Dword.

Oppgave 9

- a) Hvor mange primtall er det mellom 100 og 150. Skriv dem opp!
- b) Finn primtallsfaktoriseringen til $25! = 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ (uttales som 25 fakultet og er som du ser produktet av tallene fra 1 til 25). Slå opp i teorien hvis du ikke vet hva en primtallsfaktorisering er.
- c) Hvor mange 0-er ender tallet $25!$ på? Finn svaret uten å regne ut tallet.

I punkt c) får du en fasit ved å regne ut $25!$ og så telle opp 0-ene bakerst. Det går normalt ikke med en vanlig lommekalkulator, men kalkulatoren i Windows innstilt på «Scientific» klarer det. Der er det en egen knapp for fakultet.

Oppgave 10

- a) Finn største felles divisor for 420 og 72 ved å bruke primtallsfaktorisering.
- b) Finn største felles divisor for 420 og 72 ved hjelp av Euklids algoritme. Vis hvordan du fant svaret. Sett opp en tabell slik som i forelesningsnotatene.
- c) Finn største felles divisor for 53295 og 10920 ved hjelp av Euklids algoritme. Vis hvordan du fant svaret.

I Oppgave 10) kan du teste svaret ditt ved hjelp av flg. Java-metode:

```
public static int gcd(int a, int b)
{
    while (b != 0)
    {
        System.out.printf("%8d%8d\n", a, b);
        int r = a % b; a = b; b = r;
    }
    return a;
}
```