

Løsningsforslag for 1. obligatoriske oppgave høsten 2014

Oppgave 1a)

1) Bruk av sannhetsverditabell:

p	q	$\neg p$	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge \neg p$	$((p \vee q) \wedge \neg p) \rightarrow q$
S	S	U	S	U	S
S	U	U	S	U	S
U	S	S	S	S	S
U	U	S	U	U	S

Vi ser at $((p \vee q) \wedge \neg p) \rightarrow q$ er en tautologi, dvs. er sant for alle kombinasjoner av p og q .

2) Direkte argumentasjon:

Den eneste måten utsagnet kan bli usant på er at høyre side av implikasjonen (dvs. q) er usann og venstre side (dvs. $(p \vee q) \wedge \neg p$) er sann. Men hvis q er usann, vil $p \vee q \equiv p$ og dermed $(p \vee q) \wedge \neg p \equiv p \wedge \neg p$ og det siste er alltid usant. Med andre ord hvis høyre side er usann, må også venstre side være usann.

3) Bruk av formler:

$((p \vee q) \wedge \neg p) \rightarrow q$	braker distributiv lov på $(p \vee q) \wedge \neg p$
$\equiv ((p \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg p)) \rightarrow q$	braker at $p \wedge \neg p \equiv U$ (usann)
$\equiv (U \vee (q \wedge \neg p)) \rightarrow q$	braker at $U \vee (q \wedge \neg p) \equiv q \wedge \neg p$
$\equiv (q \wedge \neg p) \rightarrow q$	braker at $(q \wedge \neg p) \rightarrow q \equiv \neg(q \wedge \neg p) \vee q$
$\equiv \neg(q \wedge \neg p) \vee q$	braker DeMorgans lov på $\neg(q \wedge \neg p)$
$\equiv \neg q \vee p \vee q$	braker at $\neg q \vee q \equiv S$ (sann)
$\equiv S \vee p \equiv S$	

Oppgave 1b)

p	q	r	$q \wedge r$	$p \rightarrow q$	$p \rightarrow r$	$p \rightarrow (q \wedge r)$	$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$
S	S	S	S	S	S	S	S
S	S	U	U	S	U	U	U
S	U	S	U	U	S	U	U
S	U	U	U	U	U	U	U
U	S	S	S	S	S	S	S
U	S	U	U	S	S	S	S
U	U	S	U	S	S	S	S
U	U	U	U	S	S	S	S

Vi ser at kolonnene for $p \rightarrow (q \wedge r)$ og $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$ har de samme sannhetsverdiene og de to utsagnene er dermed ekvivalente.

Oppgave 2

p : Det regner

q : Det blåser

- a) p bare hvis $\neg q$ blir: $p \rightarrow \neg q$ eller det kontrapositive: $q \rightarrow \neg p$
- b) både p og q blir: $p \wedge q$
- c) verken p eller q blir: $\neg(p \vee q)$ eller $\neg p \wedge \neg q$
- d) q hvis ikke p er det samme som hvis ikke p , q og det blir: $\neg p \rightarrow q$
- e) ikke p og ikke q blir: $\neg p \wedge \neg q$ eller $\neg(p \vee q)$
- f) q er tilstrekkelig for $\neg p$ blir: $q \rightarrow \neg p$
- g) $\neg q$ er nødvendig for p betyr at $\neg q$ må være sann for at p skal være sann. Med andre ord at hvis $\neg q$ er usann, så er p usann. Det oversettes til $\neg \neg q \rightarrow \neg p$ eller $q \rightarrow \neg p$. Ved kontraposisjon blir det: $p \rightarrow \neg q$. (Hvis det regner er det vindstille).

Oppgave 3

$P(x)$: x har en bærbar pc $Q(x)$: x har en iPad

- a) «Det er en student som . . . » betyr at «det finnes en x som . . . ». Dermed må vi bruke eksistenskvantoren. Med andre ord slik: $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$
- b) Når vi har «Alle» må vi bruke all-kvantoren, dvs. slik: $\forall x(P(x) \vee Q(x))$
- c) «Det finnes en . . . » betyr at vi må bruke eksistenskvantoren: $\exists x(P(x) \wedge \neg Q(x))$
- d) Dette kan vi skrive slik: For alle studenter gjelder at hvis studenten har en iPad, så har studenten en bærbar pc. «For alle» gir at vi må bruke all-kvantoren og hvis at vi har en implikasjon. Dette kan settes opp slik: $\forall x(Q(x) \rightarrow P(x))$. Det er mulig å skrive det annerledes. Husk at hvis a og b er to utsagn, så er $a \rightarrow b$ ekvivalent med $\neg a \vee b$. Dermed får vi at $\forall x(Q(x) \rightarrow P(x))$ er ekvivalent med $\forall x(\neg Q(x) \vee P(x))$ som igjen er ekvivalent med (DeMorgans lov) $\neg \exists x(Q(x) \wedge \neg P(x))$. Dette oversettes til: Det er ingen studenter som har iPad uten at de har bærbar pc.
- e) «Det er ingen» betyr at vi må bruke eksistenskvantoren med et ikke foran. Dvs. slik: $\neg \exists x(\neg(P(x) \vee Q(x)))$. Det er ekvivalent med (DeMorgans lov): $\forall x(P(x) \vee Q(x))$.

Oppgave 4.

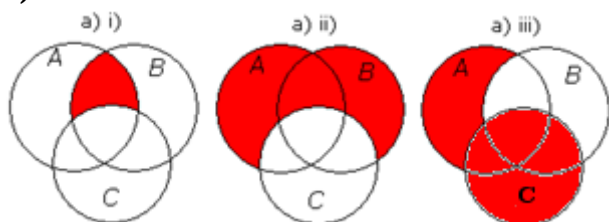
- a) Usant. Hvis for eksempel $m = 2$, så finnes ingen n slik at $n^2 = m$.
- b) Usant. Hvis for eksempel $m = -1$ og $n = 1$, så er ikke $mn > n$.
- c) Sant. Vi kan velge $m = n^2$
- d) Usant. Hvis for eksempel $m = -100$, så finnes ingen n som oppfyller kravet.

Oppgave 5

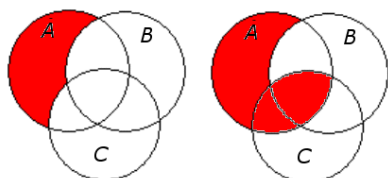
- a) Usant siden 4 ikke går opp i 5
- b) Sant siden 2 går opp i 4
- c) Usant. Bruk a) som moteksempel.
- d) Sant. Tallet $m = 1$ går opp i alle tall n .
- e) Sant. Alle tall m (forskjellig fra 0) går opp i $n = 0$.

Oppgave 6

a)



b)



Vi ser at $(A - B) - C$ til venstre er forskjellig fra $A - (B - C)$ til høyre!

Oppgave 7

- i) $A \cap B = \{3,4\}$
- ii) $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}$
- iii) $\overline{A} = \{5,6,7,8\}$
- iv) $\overline{B} = \{1,2,7,8\}$
- v) $\overline{A \cap B} = \{1,2,5,6,7,8\}$
- vi) $\overline{A \cup B} = \{7,8\}$
- vii) $\overline{A \cap B} = \{7,8\}$
- viii) $\overline{A \cap B} = \{7,8\}$

Vi ser at $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ og $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. Dette er rett og slett DeMorgans lover for mengder.

Oppgave 8

La D være mengden av de som tar Diskret matematikk, P de som tar Programmering og W de som tar Webprosjekt. En oppgave av denne typen kan løses på flere måter. En måte er å bruke formler for antall i mengder. En annen måte er å «fylle ut» et Venn-diagram. Det er normalt enklest å bruke Venn-diagram.

1) Formler for antall i mengder

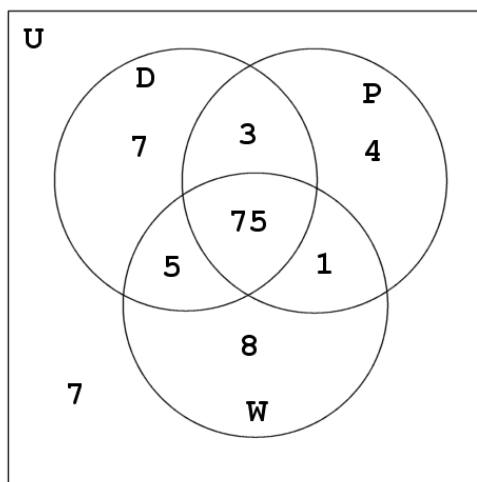
Inklusjon-eksklusjonsformelen sier at

$$|D \cup P \cup W| = |D| + |P| + |W| - |D \cap P| - |D \cap W| - |P \cap W| + |D \cap P \cap W|$$

- a) Vi får $|D \cup P \cup W| = 90 + 83 + 89 - 78 - 80 - 76 + 75 = 103$. Dvs. 103 som tar minst ett emne. Da blir det $110 - 103 = 7$ som ikke tar noen emner.
- b) Vi skal finne antallet i $D \cap P - W$. Denne mengden er lik $D \cap P - D \cap P \cap W$ og siden $D \cap P \cap W$ er en delmengde av $D \cap P$ får vi at $|D \cap P - D \cap P \cap W|$ blir lik $|D \cap P| - |D \cap P \cap W|$. Dermed blir svaret $78 - 75 = 3$.
- c) På samme måte som i b) kan vi finne at $|D \cap W - P| = 5$ og $|P \cap W - D| = 1$. Svaret blir derfor $3 + 5 + 1 = 9$.
- d) Her skal vi finne antallene i $D - (W \cup P)$, $P - (D \cup W)$ og $W - (D \cup P)$. Antallet i $D - (W \cup P)$ er lik antallet i $D - D \cap (W \cup P)$ og $|D - D \cap (W \cup P)| = |D| - |D \cap (W \cup P)|$. Videre har vi at $D \cap (W \cup P) = (D \cap W) \cup (D \cap P)$. Dermed blir $|D \cap (W \cup P)| = |D \cap W| + |D \cap P| - |D \cap P \cap W|$. Til sammen får vi at $|D - (W \cup P)| = 90 - (80 + 78 - 75) = 7$. Antallet til $P - (D \cup W)$ blir 4 og antallet til $W - (D \cup P)$ blir 8. Svaret blir derfor $7 + 4 + 8 = 19$.

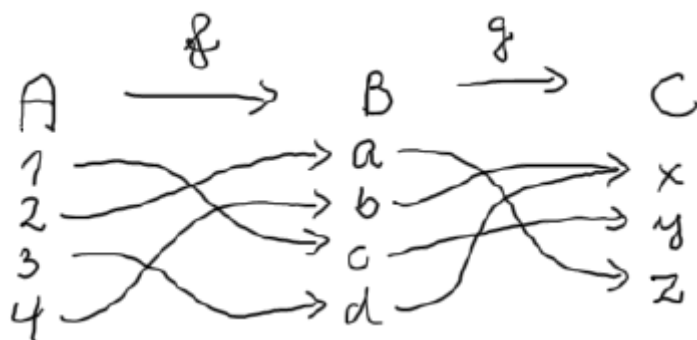
2) Bruk av Venn-diagram

Dette er normalt den enkleste og raskeste metoden. Opplysningene legges inn i et Venn-diagram slik at hvert tall står for **antallet elementer i den delen der tallet står**. Da starter vi med å fylle området i midten. Det representerer mengden $D \cap P \cap W$ der antallet er 75. Så fortsetter vi utover. Mengden $D \cap P$ har to deler. Det er $D \cap P \cap W$ og $D \cap P - D \cap P \cap W$. Siden antallet i $D \cap P$ er 78 og antallet i $D \cap P \cap W$ er 75, blir antallet i $D \cap P - D \cap P \cap W$ lik $78 - 75 = 3$. Osv. Det gir oss flg. utfylte Venn-diagram:



- a) Her skal vi finne antallet i mengden $U - (D \cup P \cup W)$. Det blir $110 - 103 = 7$
- b) Her skal vi finne antallet i mengden $(D \cap P) - W$. Det blir 3.
- c) Her skal vi finne antallet i mengden $((D \cap P) - W) \cup ((P \cap W) - D) \cup ((D \cap W) - P)$. Det blir $3 + 1 + 5 = 9$
- d) Her skal vi finne antallet i mengden $(D - (P \cup W)) \cup (P - (D \cup W)) \cup (W - (D \cup P))$. Det blir $7 + 4 + 8 = 19$.

Oppgave 9



Vi ser at f er en-til-en siden det ikke går mer enn én pil inn til noe element i B og f er på siden det går en pil til alle elementene i B . Funksjonen g er derimot ikke en-til-en siden det går to piler inn til elementet x . Men g er på siden det går en pil til alle elementene i C .

Vi får $h(1) = y$, $h(2) = z$, $h(3) = x$ og $h(4) = x$. Funksjonen h har ingen invers siden den ikke er en-til-en.

Oppgave 10

i) $f(0) = (0 \text{ div } 3) \bmod 7 = 0 \bmod 7 = 0$

$$f(40) = (40 \text{ div } 3) \bmod 7 = 13 \bmod 7 = 6$$

$$f(100) = (100 \text{ div } 3) \bmod 7 = 33 \bmod 7 = 5$$

ii) Siden vi har mod 7 vil verdimengden maksimalt kunne bli $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Fra punkt i) har vi at 0, 5 og 6 er i verdimengden. Videre har vi at $f(3) = 1$, $f(6) = 2$, $f(9) = 3$ og $f(12) = 4$. Dermed blir verdimengden $V_f = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Da verdiområdet er oppgitt til å være N , blir verdimengden og verdiområdet forskjellige. Dermed er funksjonen ikke på. Den er ikke en-til-en siden for eksempel både $f(0)$ og $f(1)$ er 0.