Avsnitt 6.5 i læreboken Utvalg med tilbakelegging

Gitt n forskjellige objekter. Vi skal velge r objekter på en slik måte at for hvert objekt vi velger, noterer vi hvilket objekt det er og legger det tilbake. Det betyr at samme objekt kan velges flere ganger.

1) Hvis rekkefølgen objektene velges har betydning, kalles det et ordnet r-utvalg med tilbakelegging. (eng: permutation with repetition)
2) Hvis rekkefølgen ikke betyr noe, kalles et uordnet r-utvalg med tilbakelegging. (eng: combination with repetition)

1) Ordnet utvalg Det første objektet kan velges på n måter. Når objektet legges tilbake vil det også være n måter å velge neste objekt. Osv. Dermed flg. antall mulige slike utvalg:

$$\boxed{n \cdot n \cdots n = n^r}$$

Eksempel Gitt bokstavene A, B og C. Hvor mange ordnede 5-utvalg med tilbakelegging finnes det?
Svar: $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5 = 243$.

2) Uordnede utvalg

Eksempel Gitt bokstavene A og B. Vi skal finne uordnede 3-utvalg (med tilbakelegging). Vi finner først alle ordnede 3-utvalg:
AAA, AAB, ABA, ABB, BAA, BAB, BBA, BBB

Vi fikk $2^3 = 8$ ordnede utvalg. De tre utvalgene med 2 A-er og én B ses på som samme utvalg når vi ser bort fra rekkefølgen. Tilsvarende for de tre utvalgene som inneholder én A og 2 B-er. Dermed er det fire forskjellige uordnede utvalg:

AAA, AAB, ABB, BBB

Vi har flg. formel for dette:

$$\binom{n+r-1}{r}$$

Sjekk: $n = 2$ og $r = 3$ gir $\binom{2+3-1}{3} = \binom{4}{3} = \binom{4}{1} = 4.$

Oppsummering

Gitt n forskjellige objekter. Vi skal velge r objekter blant dem.

	Uten tilbakelegging	Med tilbakelegging
Ordnet	$\frac{n!}{(n-r)!}$	n^r
Uordnet	$\binom{n}{r}$	$\binom{n+r-1}{r}$

Alternativ form for tilbakelegging

Vi skal nå tenke oss samlingen av objekter vi skal velge fra har nok eksemplarer av hver type (n forskjellige typer) til å velge alle mulige r-utvalg.

Eksempel I fruktdisken i butikken er det epler, pærer og appelsiner. Vi skal kjøpe 4 frukter. Hvor mange måter kan det gjøres?

Svar: $n = 3$, $r = 4$ $\binom{n+r-1}{r} = \binom{3+4-1}{4} = \binom{6}{4} = \binom{6}{2}$
$= \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$

Permutasjoner der det inngår like verdier

Hvis vi har $\underline{n}$ forskjellige objekter, kan de permuteres på $n!$ forskjellige måter.

Men hvis noen av de $\underline{n}$ objektene er like, blir det annerledes.

Eksempel

Gitt bokstavene A, A, A, B, B, C, dvs. 6 bokstaver. Hvor mange måter kan disse permuteres?

$$\underline{B}\ \underline{A}\ \underline{\ \ }\ \underline{B}\ \underline{A}\ \underline{A}$$

Vi kan plassere de tre A-ene på $\binom{6}{3}$ mulige måter. Deretter er det $\binom{3}{2}$ mulige måter å plasse de to B-ene. Til slutt er det $\binom{1}{1}$ måter å plassere C-en. Svar:

$$\binom{6}{3}\binom{3}{2}\binom{1}{1} = \frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}\cdot\frac{3\cdot2}{2\cdot1}\cdot 1 = 20\cdot 3 = 60.$$

Generelt

Gitt $\underline{n}$ objekter der $\underline{k}$ av dem er forskjellige. Anta at det er n_1 stykker av type 1, n_2 av type 2, osv. til n_k av type k. Vi må ha at $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$. De n objektene kan permuteres på flg. antall måter:

$$\boxed{\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdots = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_k!}}$$

Eksempel 1 Hvor mange måter kan ordet RABARBRA stokkes om (permuteres)? Vi har 3 A-er, 3 R-er og 2 B-er.

Svar: $$\frac{8!}{3!\cdot3!\cdot2!} = \frac{8\cdot\cancel{7}\cdot\cancel{6}\cdot5\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3\cdot2}}{\cancel{3\cdot2}\cdot\cancel{3\cdot2}\cdot\cancel{2}} = 560.$$

Eksempel 2 Hvor mange måter kan ordet KULTURUKE stokkes om?

Vi har 3 U-er, 2 K-er og 1 av hver av de øvrige.

Svar: $\frac{9!}{3!\cdot 2!\,1!\,1!\,1!\,1!} = \frac{9!}{6\cdot 2} = \frac{\cancel{9}^{3}\cdot\cancel{8}^{2}\cdot 7!}{\cancel{2}\cancel{6}\cdot\cancel{2}} = 6\cdot 7!$

$= 30240.$

Dikteren Jan Erik Vold

(se: http://no.wikipedia.org/wiki/Jan_Erik_Vold) utgav i 1969 diktsamlingen "Kykelipi". Et av diktene handlet om omstokking av bokstavene i ordet KULTURUKE. Det inneholdt flg. omstokkinger:

ulturkuke tulekukur
tulkuruke luretukuk
ultkuruke kukutelur
ukturulke ruktukule
tlukuruke lurekuktu
ukturkule luekuktur
urtukulke kuktulure
turlukuke rukletuku
kulrukute tuklekuru
ultrukuke urukekult
kuleturuk kuruketul
rulekukur

På Youtube finner du flere innslag der Jan Erik Vold leser dette diktet.

Samme idé i en annen sammenheng

Anta at vi har $\underline{n}$ forskjellige objekter som skal deles inn i $\underline{k}$ grupper. Det skal være n_1 stykker i gruppe 1, n_2 stykker i gruppe 2, osv. til n_k stykker i gruppe k $(n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n)$.
Dette kan gjøres på flg. antall måter:

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_k!}$$

Eksempel Bridge Kortstokken har 52 kort og det er 4 spillere, dvs. 13 kort til hver. Hvor mange måter kan kortene deles ut på?

Svar: $\frac{52!}{13! \cdot 13!\, 13!\, 13!} = 53644737765488792839237440000$