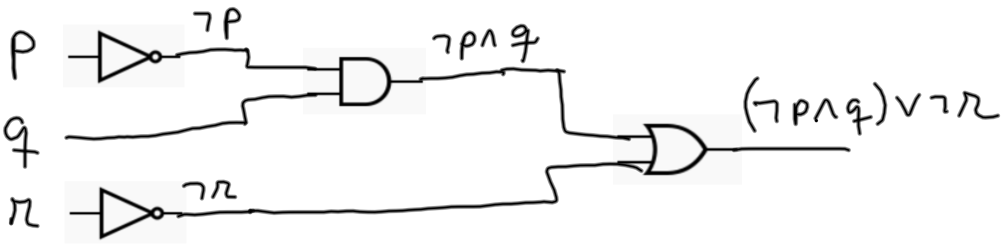
# Diskret matematikk – onsdag 27./fredag 29. august 2014

Flere eksempler på bruk av utsagnslogikk

## 3) Digitalteknikk – logiske kretser

OG ELLER IKKE

En krets for $(\neg p \wedge q) \vee \neg r$ blir slik:




## 4) Gåter

I en by bor det kun riddere (eng: knights) og knekter (eng: knaves). En ridder snakker alltid sant, mens en knekt alltid snakker usant.

Vi møter to personer A og B fra byen. Person A sier at B er en ridder. Person B sier at de to er av forskjellig type. Gåte: Hva er A og hva er B?

1) Anta at A er en ridder. Det betyr at A snakker sant. Det betyr videre at B er en ridder. Det betyr igjen at B snakker sant, dvs. at A er en knekt. En selvmotsigelse. Dermed må A være en knekt.

2) Anta at B er en ridder. Dermed snakker B sant, dvs. at A er en knekt. Men da lyver A, dvs. vi har at B er en knekt. En selvmotsigelse. Det betyr at også B er en knekt.

# 5) Programmering

| Vanlig språk | ikke | og | eller | enten eller |
|---|---|---|---|---|
| « | not | and | or | either or (xor) |
| Logikk | ¬ | ∧ | ∨ | ⊕ |
| Java | ! | && | \|\| | ^ |
| PHP | NOT (!) | AND (&&) | OR (\|\|) | XOR (^) |

Java:

```
public static void main(String... args)
{
  boolean p = 3 > 1;   // sant
  boolean q = 1 > 2;   // usant

  boolean r = (p || q) ^ q;  // sant

  System.out.println(r);
}
```

# Avsnitt 1.3 fra læreboken – Ekvivalente utsagn

## Tautologi (selvfølgelighet) og selvmotsigelse

Et sammensatt utsagn som ALLTID er sant, kalles en TAUTOLOGI. Et sammensatt utsagn som ALLTID er usant, kalles en SELVMOTSIGELSE (eng: contradiction).

### Eksempler

1)

| $p$ | $p \vee \neg p$ |
|---|---|
| S | S |
| U | S |

Utsagnet $p \vee \neg p$ er en tautologi.

2)

| $p$ | $p \wedge \neg p$ |
|---|---|
| S | U |
| U | U |

Utsagnet $p \wedge \neg p$ er en selvmotsigelse.

## Ekvivalens

To utsagn p og q kalles EKVIVALENTE hvis de har det samme sannhetsinnholdet. Det betyr at $p \leftrightarrow q$ alltid er sant. Dette betegnes med

$$p \equiv q$$

Vi kan bruke en sannhetsverditabell til å avgjøre om to utsagn er ekvivalente. Hvis kolonnene for de to utsagnene er identiske, er utsagnene ekvivalente.

## Eksempel 1

DeMorgans to lover:

a) $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ ← denne har vi sett på tidligere.

b) $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ ← denne ser vi på i tabellen under.

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ | $\neg p$ | $\neg q$ | $\neg(p \wedge q)$ | $\neg p \vee \neg q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| S | S | S | U | U | U | U |
| S | U | U | U | S | S | S |
| U | S | U | S | U | S | S |
| U | U | U | S | S | S | S |

Vi har dermed vist at $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$. like kolonner

## Eksempel 2

$p \to q \equiv \neg p \vee q$

| $p$ | $q$ | $\neg p$ | $p \to q$ | $\neg p \vee q$ |
|---|---|---|---|---|
| S | S | U | S | S |
| S | U | U | U | U |
| U | S | S | S | S |
| U | U | S | S | S |

like kolonner

Sannhetsverditabellen viser at $p \to q \equiv \neg p \vee q$ stemmer.

# Tabeller over ekvivalenser hentet fra læreboken

**TABLE 6** Logical Equivalences.

| *Equivalence* | *Name* |
|---|---|
| $p \wedge \mathbf{T} \equiv p$<br>$p \vee \mathbf{F} \equiv p$ | Identity laws |
| $p \vee \mathbf{T} \equiv \mathbf{T}$<br>$p \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$ | Domination laws |
| $p \vee p \equiv p$<br>$p \wedge p \equiv p$ | Idempotent laws |
| $\neg(\neg p) \equiv p$ | Double negation law |
| $p \vee q \equiv q \vee p$<br>$p \wedge q \equiv q \wedge p$ | Commutative laws |
| $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$<br>$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ | Associative laws |
| $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$<br>$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ | Distributive laws |
| $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$<br>$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ | De Morgan's laws |
| $p \vee (p \wedge q) \equiv p$<br>$p \wedge (p \vee q) \equiv p$ | Absorption laws |
| $p \vee \neg p \equiv \mathbf{T}$<br>$p \wedge \neg p \equiv \mathbf{F}$ | Negation laws |

**TABLE 7** Logical Equivalences Involving Conditional Statements.

| |
|---|
| $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$ |
| $p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$ |
| $p \vee q \equiv \neg p \rightarrow q$ |
| $p \wedge q \equiv \neg(p \rightarrow \neg q)$ |
| $\neg(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$ |
| $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \wedge r)$ |
| $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \equiv (p \vee q) \rightarrow r$ |
| $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \vee r)$ |
| $(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \rightarrow r$ |

**TABLE 8** Logical Equivalences Involving Biconditionals.

| |
|---|
| $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ |
| $p \leftrightarrow q \equiv \neg p \leftrightarrow \neg q$ |
| $p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ |
| $\neg(p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow \neg q$ |

## Eksempel 3 Distributiv lov

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

| $p$ | $q$ | $r$ | $p\wedge q$ | $p \wedge r$ | $q \vee r$ | $p\wedge(q\vee r)$ | $(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| S | S | S | S | S | S | S | S |
| S | S | U | S | U | S | S | S |
| S | U | S | U | S | S | S | S |
| S | U | U | U | U | U | U | U |
| U | S | S | U | U | S | U | U |
| U | S | U | U | U | S | U | U |
| U | U | S | U | U | S | U | U |
| U | U | U | U | U | U | U | U |

like kolonner.

# Avsnitt 1.4 i læreboken – Predikater, kvantorer og utsagnsfunksjoner

## En utsagnsfunksjon

En funksjon P der P(x) er et utsagn for hver aktuell verdi av x, kalles en utsagnsfunksjon.

### Eksempel

La P(x) være gitt ved: $x > 10$ der x er et heltall.

Vi har at $x > 10$ er sant eller usant avhengig av verdien til x. Dermed P(x) en utsagnsfunksjon.

Variabelen x kalles funksjonens subjekt og $x > 10$ er funksjonens predikat.

Én funksjon har en definisjonsmengde, dvs. de verdiene av x der funksjonen er definert. I vårt eksempel er definisjonsmengden alle hele tall.

En utsagns-funksjon i Java:

```java
public static boolean P(int x)
{
  return x > 10;
}
```

## Kvantorer (eng: quantifier)

Symbolet ∀ står for all-kvantoren og ∃ for eksistens-kvantoren. La P(x) være en utsagns-funksjon. Da blir flg. uttrykk utsagn:

$$\forall x\, P(x) \quad , \quad \exists x\, P(x)$$

1) Utsagnet $\forall x P(x)$ leses som:

For alle $x$ (i def. mengden til $P$) er det slik at $P(x)$.

Eksempel $P(x): x > 10$. Da blir $\forall x P(x)$ blir:

For alle hele tall $x$ er det slik at $x > 10$. Usant.

2) Utsagnet $\exists x P(x)$ leses som:

Det eksisterer (eller finnes) et heltall $x$ slik at $x > 10$.

Sant.

Huskeregler:

| Utsagn | Når er det sant? | Når er det usant? |
|---|---|---|
| $\exists x P(x)$ | Hvis det finnes minst én x som gjør P(x) sann. | Hvis P(x) er usann for alle x, dvs. det finnes ingen x som gjør P(x) sann. |
| $\forall x P(x)$ | Hvis P(x) er sann for alle x. | Hvis det finnes minst én x der P(x) er usann. |

Negasjoner Vi får negasjonen til et kvantorutsagn ved å sette $\neg$ (ikke) foran:

a) $\neg \exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$

b) $\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$

Generaliseringer av DeMorgans lover.

Spesialtilfeller

Anta at def. mengden til $P(x)$ består av de endelig mange verdiene $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

$$\forall x P(x) = P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \cdots \wedge P(x_n)$$
$$\exists x P(x) = P(x_1) \vee P(x_2) \vee \cdots \vee P(x_n)$$
$$\neg \forall x P(x) = \neg P(x_1) \vee \neg P(x_2) \vee \cdots \vee \neg P(x_n)$$
$$\neg \exists x P(x) = \neg P(x_1) \wedge \neg P(x_2) \wedge \cdots \wedge \neg P(x_n)$$