Diskret matematikk – onsdag 24. sept. 2014

Avsnitt 2.6 fra læreboken – Matriser (eng: matrix)

En matrise er en rektangulær oppstilling av tall og betegnes med en stor bokstav, f.eks. $A, B, C, \ldots, M$.

Eksempler
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Tallene i en matrise kalles elementer. En matrise har rader (vannrett, horisontalt) og kolonner (loddrett, vertikalt). I eksemplene har A 2 rader og 3 kolonner, B har 3 rader og 2 kolonner og C har 2 rader og 2 kolonner.

OBS En matrise kan ha en rad og en kolonne.

Eksempler
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$$

A: 1 rad, 3 kolonner. B: 3 rader, 1 kolonne. C: 1 rad, 1 kolonne.

Matrisedimensjon

En matrise med m rader $(m>0)$ og n kolonner $(n>0)$ har dimensjon $m \times n$.

Eksempel
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$
A er en 3×4-matrise, dvs. dimensjon 3×4.

Kvadratiske matriser

En matrise er <u>kvadratisk</u> hvis antall rader er like antall kolonner.

<u>Eksempel</u>

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

B er en 3×3-matrise og dermed en kvadratisk matrise.

Diagonaler

En kvadratisk matrise har en hoveddiagonal og en bidiagonal. Hoveddiagonalen består av elementene fra det øverste venstre hjørnet og på skrå ned til det nederste høyre hjørnet.
Bidiagonalen består av elementene fra det øverste høyre hjørnet og på skrå ned til det nederste venstre hjørnet.

<u>Eksempel</u>

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

hoveddiagonalen

bidiagonalen

En generell $m \times n$-matrise:

$$A = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array} \!\!\! \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \phantom{a_{1,1}} & \phantom{a_{1,2}} & \phantom{a_{1,3}} & & j & \phantom{a_{1,n}} \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & . & . & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & . & . & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & . & . & a_{3,n} \\ . & . & . & . & a_{i,j} & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} & . & . & a_{m,n} \end{bmatrix} \end{array}$$

Elementet $a_{i,j}$ er elementet i rad <u>i</u> og kolonne <u>j</u>

Matriseaddisjon

La A og B være to $m \times n$-matriser (dvs. de må ha samme dimensjon). Da defineres $A+B$ som den matrisen vi får ved parvis addere elementene fra A og B. Elementet på plass $\underline{i,j}$ i $A+B$ er $a_{i,j} + b_{i,j}$.

Eksempel 1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Her vil $A+B$ ikke være definert siden A og B ikke har samme dimensjon. A er en 2×3-matrise og B en 2×2-matrise.

Eksempel 2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad A+B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrisesubtraksjon

Tilsvarende som for addisjon, men nå tar vi parvis differens istedenfor sum.

Eksempel 1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad A-B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Et tall multiplisert med en matrise

La a være et tall og A en vilkårlig matrise. Matrisen aA er den matrisen vi får ved å gange alle elementene i A med tallet a.

Eksempel $a = 3$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$aA = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Matrisemultiplikasjon

Gitt to matriser A og B. Da kan A multipliseres med B og danne produktet AB hvis antall kolonner i A er lik antall rader i B. Hvis A er en $m \times n$-matrise, må B være en $n \times k$-matrise for at produktet AB skal være definert. Produktet AB blir en $m \times k$-matrise.

Som en del av matrisemultiplikasjonen må vi kunne "gange sammen" en rad i A med en kolonne i B. Det gjøres slik:

$$\underbrace{[a\ b\ c\ d \dots]}_{\text{en rad i } A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ \vdots \end{bmatrix}}_{\text{en kolonne i } B} = ax + by + cz + du + \dots \;.$$

Matrisemultiplikasjonen AB gjennomføres ved at alle radene i A "ganges" med alle kolonnene i B. Elementet på plass i,j i AB er det vi får ved å "gange" rad i i A med kolonne j i B.

Eksempel 1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad 3\times 2\text{-matrise}$$

2×3-matrise

Her vil AB være definert og bli en 2×2-matrise.

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$a = 1\cdot 0 + 2(-2) + (-1)3 = 0-4-3 = -7$$

$$b = 1\cdot 1 + 2\cdot 0 + (-1)\cdot 1 = 1+0-1 = 0$$

$$c = 0\cdot 0 + 1\cdot(-2) + 2\cdot 3 = 0-2+6 = 4$$

$$d = 0\cdot 1 + 1\cdot 0 + 2\cdot 1 = 0+0+2 = 2$$

Skjema for matrisemultiplikasjon

Eksempel $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{array}{c|ccc|cc|c} & & & & 0 & 1 & \\ & & & & -2 & 0 & B \\ & & & & 3 & 1 & \\ \hline A & 1 & 2 & -1 & -7 & 0 & \\ & 0 & 1 & 2 & 4 & 2 & \end{array}$$

OBS $AB \neq BA$

I vårt eksempel eksisterer BA fordi B er en 3×2-matrise og A er en 2×3-matrise. Satt opp med skjema:

$$\begin{array}{c|cc|ccc|c} & & & 1 & 2 & -1 & A \\ & & & 0 & 1 & 2 & \\ \hline & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & \\ B & -2 & 0 & -2 & -4 & 2 & \\ & 3 & 1 & 3 & 7 & -1 & \end{array}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -4 & 2 \\ 3 & 7 & -1 \end{bmatrix}$$

Kvadratiske matriser

Hvis A er kvadratisk, kan A multipliseres med seg selv. Vi skriver vanligvis A^2 istedenfor AA, A^3 istedenfor AAA, osv. Spesielt er $A^1 = A$.

Enhets- eller identitetsmatrisen

Den kvadratiske matrisen I som har 1-ere på hoveddiagonalen og 0-er alle andre steder, kalles enhets- eller identitetsmatrisen.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dimensjon 2×2 Dimensjon 3×3 Dimensjon 4×4

<u>Definisjon</u> La A være en kvadratisk matrise, dvs. en $m \times m$-matrise. Da er $A^0 = I$ der I er enhetsmatrisen av dimensjon $m \times m$.

<u>Eksempel</u>

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Den transponerte matrisen

Den <u>transponerte</u> matrisen til en matrise A betegnes med A^T og er den matrisen vi får ved å bytte om rader og kolonner i A. Dvs. <u>Rad i</u> i A blir <u>kolonne i</u> i A^T.

Eksempel $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

Vi ser at 1. rad i A har blitt 1. kolonne i A^T og at 2. rad i A har blitt 2. kolonne i A^T.

OBS Hvis A er en $m \times n$-matrise, blir A^T en $n \times m$-matrise.

Setning: Hvis A kan multipliseres med B, blir $(AB)^T = B^T \cdot A^T$

Symmetri

En kvadratisk matrise A kalles symmetrisk hvis $A = A^T$.

Eksempel 1 $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $A^T = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $A = A^T$

Matrisen kalles symmetrisk fordi den er symmetrisk om hoveddiagonalen.

Eksempel 2 $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $A^T = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $A \neq A^T$

I dette eksemplet er A ikke symmetrisk. Det som ødelegger symmetrien er at verdien i nederste venstre hjørne (tallet 1) er forskjellig fra verdien i øverste høyre hjørne (tallet 0).

OBS Enhetsmatrisen I er symmetrisk.