Sumregelen

Anta at en oppgave kan løses ved hjelp av kun én av to teknikker. Oppgaven kan løses på m måter ved hjelp av første teknikk og n måter ved hjelp av andre teknikk. Da kan oppgaven løses på $m+n$ måter.

Dette svarer til flg. regel fra mengdelære:
La A og B være to mengder der $A \cap B = \emptyset$. Da er $|A \cup B| = |A| + |B|$.

Eksempel 1 Vi har 40 studenter i én klasse og 30 studenter i en annen klasse. Det skal velges en felles tillitsrepresentant for de to klassene. Hvor mange muligheter er det? Svar: $40 + 30 = 70$

En utvidelse av sumregelen

Anta at en oppgave kan løses ved hjelp av kun én av k ulike teknikker. Disse k teknikkene har henholdsvis $n_1, n_2, \ldots, n_k$ løsningsmåter.
Da kan oppgaven løses på $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ måter.

Eksempel 2 Hvor mange bitsekvenser med lengde 8 eller mindre finnes det?

$$\text{Svar: } 2^8 + 2^7 + \cdots + 2^1 + 2^0 = \sum_{j=0}^{8} 2^j = \frac{2^9 - 1}{2 - 1} = 2^9 - 1 = 511.$$

Generelt: Det finnes $2^{n+1} - 1$ bitsekvenser med lengde n eller mindre

Subtraksjonsregelen

Anta at en oppgave kan løses på m måter ved hjelp av én teknikk eller på n måter ved hjelp av en annen teknikk. Da kan oppgaven løses på $m+n$ minus det antallet måter som er felles for de to teknikkene.

Dette svarer til flg. regel fra mengdelære:
La A og B være to mengder. Da er $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Eksempel Hvor mange bitsekvenser med lengde 8 har 1 som første bit eller 00 som de to siste bitene?

F.eks. 10110110, 01111100, 10110100 er slike sekvenser.

Antall som starter med 1 : $1\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2 = 2^7$
Antall som slutter med 00 : $2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot1\cdot1 = 2^6$
Antall som oppfyller begge delene : $1\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot1\cdot1 = 2^5$

Svaret blir: $2^7 + 2^6 - 2^5 = 160$.

Divisjonsregelen

Anta at en oppgave kan løses på n måter og at de n måtene kan deles opp i grupper av d like måter. Da kan oppgaven løses på n/d måter

En enkel anvendelse

La n og k være positive tall. Da vil det være $n \operatorname{div} k$ forskjellige tall fra 1 til n som er delelig med k.
Husk: $n \operatorname{div} k$ er kvotienten. Vi har også $n \operatorname{div} k = \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$

Eksempel Hvor mange av tallene fra 1 til 100 er delelig med 3 eller 4?

Delelig med 3 : 100 div 3 = 33
Delelig med 4 : 100 div 4 = 25
Delelig med 12 : 100 div 12 = 8

OBS Et tall er delelig med 3 og 4 hvis og bare hvis tallet er delelig med 12

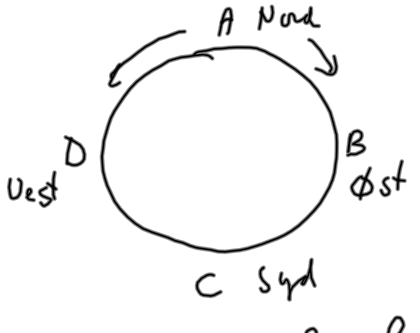
Svar: 33 + 25 − 8 = 50

Generell regel: Antallet tall fra 1 til n som er delelig med k_1 eller k_2 er gitt ved $n \text{ div } k_1 + n \text{ div } k_2 - n \text{ div } \mathrm{lcm}(k_1, k_2)$ der $\mathrm{lcm}(k_1, k_2)$ er minste felles multiplum for k_1 og k_2.

Divisjonsregelen for mengder

La mengden A være en union av mengdene $A_1, A_2, \ldots, A_k$, dvs. $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_k$. Anta at mengdene A_1 til A_k er parvis disjunkte og at $|A_i| = d$ for alle i. Da er $|A| = k \cdot d$. Det betyr også at $|A|/d = k$.

Eksempel Fire personer A, B, C og D skal plasseres rundt et sirkelformet bord.



To bordplasseringer anses som like hvis hver person har de samme to personene på hver side.

Hvor mange forskjellige bordplasseringer er det?

Det er 4 muligheter i nord, deretter 3 muligheter i øst og så 2 muligheter i syd og til slutt 1 mulighet i vest. Det blir $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ muligheter. Dermed blir det $24/4 = 6$ forskjellige bordplasseringer.

Eksempel der flere regler brukes

Et passord skal ha 6 eller 7 tegn og hvert tegn skal være en stor bokstav eller et siffer. Passordet må inneholde minst én bokstav. Hvor mange slike passord finnes det?

Tilfellet 6 tegn: 39^6 muligheter med bokstaver og siffer

Kun siffer: 10^6

Minst én bokstav: $39^6 - 10^6$

Tilfellet 7 tegn: 39^7 muligheter med bokstaver og siffer

Kun siffer: 10^7

Minst én bokstav: $39^7 - 10^7$

Svar: $39^6 - 10^6 + 39^7 - 10^7 = 140738750440$

Avsnitt 6.2 i læreboken – Pigeonhole principle

La k være et positivt heltall. Hvis vi har k beholdere og k+1 objekter som skal plasseres i beholderne, så må minst én av beholderne få minst to objekter.

Eksempel 1 Hvis 7 studenter tok eksamen i samme fag, fikk da minst to av den samme karakter? Svar: Ja, fordi det er kun 6 forskjellige karakterer (A, B, C, D, E, F).

Eksempel 2 Gitt en avgrenset barskog. Vil det der være to trær med nøyaktig samme antall barnåler? Ja, hvis det er flere trær i skogen enn det maksimale antallet nåler et tre kan ha.

En utvidelse av "the pigeonhole principle"

Hvis m objekter skal plasseres i k beholdere, vil minst én av beholderne få minst $\lceil \frac{m}{k} \rceil$ objekter.

OBS $\lceil \frac{m}{k} \rceil$ betyr avrunding oppover.

Eksempel Hvor mange studenter i en klasse på 30 har fødselsdag samme måned?

Svar: $\lceil \frac{30}{12} \rceil = 3$. Minst 3 studenter vil ha fødselsdag samme måned.