2) Logisk og

La p og q være to utsagn. Utsagnet $p \wedge q$ leses som «p og q» og er sant kun hvis begge er sanne (og er usant ellers). Dette kalles også *konjunksjonen* til p og q.

Sannhetsverditabell:

p	q	$p \wedge q$
S	S	S
S	U	U
U	S	U
U	U	U

Operatoren $\wedge$ er kommutativ, dvs $p \wedge q = q \wedge p$.

Eksempel p: 2 er mindre enn 3
q: 1 er større enn 2

$p \wedge q$: 2 er mindre enn 3 og 1 er større enn 2
$p \wedge q$ blir usann siden p er sann og q er usann.

3) Logisk eller

La p og q være to utsagn. Utsagnet $p \vee q$ leses som «p eller q» og er sant hvis minst én av dem er sanne (og er usant ellers, dvs. hvis begge er usanne). Dette kalles også *disjunksjonen* til p og q.

Sannhetsverditabell:

p	q	$p \vee q$
S	S	S
S	U	S
U	S	S
U	U	U

Operatoren $\vee$ er kommutativ, dvs $p \vee q = q \vee p$.

Eksempel p: 2 er mindre enn 3, q: 1 er større enn 2
$p \vee q$: 2 er mindre enn 3 eller 1 er større enn 2. $p \vee q$ er sann.

4) Logisk eksklusiv eller (xeller, eng: xor)

La p og q være to utsagn. Utsagnet $p \oplus q$ leses som «p eksklusiv eller q» («p xeller q», engelsk: xor) og er sant hvis p og q har motsatte verdier og er usant hvis de har like verdier.

Sannhetsverditabell:

p	q	$p \oplus q$
S	S	U
S	U	S
U	S	S
U	U	U

Operatoren $\oplus$ er kommutativ, dvs $p \oplus q = q \oplus p$.

Eller på norsk (or på engelsk)

eller	or	$p \vee q$
enten eller	either or	$p \oplus q$
hverken eller	neither nor	$\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$

5) Logisk implikasjon (eng: conditional statement)

La p og q være to utsagn. Utsagnet $p \to q$ leses som «p impliserer q» og er usant kun hvis p er sann og q er usann (dvs. sant ellers).

Sannhetsverditabell:

p	q	$p \to q$
S	S	S
S	U	U
U	S	S
U	U	S

Huskeregel: SUSS

Operatoren $\rightarrow$ er ikke kommutativ, dvs. $p \rightarrow q \neq q \rightarrow p$.
Symbolet $\rightarrow$ kalles en implikasjonspil. I utsagnet $p \rightarrow q$ kalles p for premissen (eller forutsetningen) og q for konlusjonen.

Utsagnet $p \rightarrow q$ (p impliserer q) kan uttrykkes på mange forskjellige måter. Her en noen:

- hvis p, så q
- hvis p, q
- p er tilstrekkelig for q
- q hvis p
- q når p
- en nødvendig betingelse for p er q
- p medfører q
- p bare hvis q
- en tilstrekkelig betingelse for q er p
- q hver gang p
- q er nødvendig for p
- q følger av p
- q med mindre $\neg p$

Eksempler på utsagn med implikasjon:

P: Det blåser   q: Det er kaldt

1) Hvis det blåser, så er det kaldt. $p \rightarrow q$

2) Det er kaldt hvis det blåser. $p \rightarrow q$

3) Det blåser hvis det er kaldt. $q \rightarrow p$

4) Det blåser bare hvis det er kaldt. $p \rightarrow q$

5) Det er tilstrekkelig at det blåser for at det skal være kaldt. $p \rightarrow q$

Det omvendte, kontrapositive og inverse utsagnet

Gitt utsagnet $p \to q$.

1) Utsagnet $q \to p$ kalles det omvendte utsagnet til $p \to q$.

2) Utsagnet $\neg q \to \neg p$ kalles det kontrapositive utsagnet til $p \to q$.

3) Utsagnet $\neg p \to \neg q$ kalles det inverse utsagnet til $p \to q$.

Påstand Utsagnene $p \Rightarrow q$ og $\neg q \Rightarrow \neg p$ (dvs. det kontrapositive utsagnet til $p \Rightarrow q$) har nøyaktig samme sannhetsinnhold. De er logisk like.

Vi kan bruke en sannhetsverditabell for å bevise påstander i logikk.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \Rightarrow q$	$\neg q \Rightarrow \neg p$
S	S	U	U	S	S
S	U	U	S	U	U
U	S	S	U	S	S
U	U	S	S	S	S

like

Siden kolonnene for $p \Rightarrow q$ og $\neg q \Rightarrow \neg p$ er like, er utsagnene logisk like.

Begrepene tilstrekkelig, nødvendig og bare hvis

Tilstrekkelig

La p og q være utsagn. Det at p er tilstrekkelig for q betyr at det holder at p er sann for at q skal være sann. Det svarer til $p \to q$.

Nødvendig

La som før p og q være utsagn. Det at q er nødvendig for p betyr at q MÅ være sann for at p skal kunne være sann. Med andre ord at hvis q usann, så er p garantert usann. Det svarer til $\neg q \to \neg p$ og dermed til det kontrapositive utsagnet $p \to q$.

Eksempel: Opptakskravet til Bachelor i informasjonsteknologi er generell studiekompetanse + R1 (eller S1 + S2). La utsagnet q være at du oppfyller dette kravet og p at du blir tatt opp. Da er q nødvendig for p. Med andre at hvis du ikke oppfyller opptakskravet ($\neg q$), så blir du helt sikkert ikke tatt opp ($\neg p$). Det oversettes til $\neg q \to \neg p$ og ved hjelp av kontraposisjon til $p \to q$. Utsagnet $p \to q$ betyr at hvis du blir tatt opp, så oppfyller du opptakskravet. Det bør kanskje bemerkes at en kan bli tatt opp selv uten at en oppfyller q, men da må en oppfylle noe som regnes som tilsvarende.

Legg merke til at i eksempelet er q nødvendig for p, men ikke tilstrekkelig. Det er vanligvis også en poenggrense. Det betyr at selv om en oppfyller opptakskravet, kan en ha for få poeng til å bli tatt opp.

Bare hvis

La som før p og q være utsagn. Utsagnet p hvis q betyr $q \to p$ siden q er premissen (det som står etter hvis). Hva da med: p bare hvis q? Det betyr at p er sann kun hvis q er sann, med andre ord at hvis q er usann, så er også p usann. Det siste svarer til $\neg q \to \neg p$ og ved kontraposisjon til $p \to q$.

Oppsummering:

p tilstrekkelig for q betyr: $p \to q$.

q nødvendig for p betyr: $p \to q$.

p nødvendig for q betyr: $q \to p$.

p hvis q betyr: $q \to p$.

p bare hvis q betyr: $p \to q$.

Logisk biimplikasjon eller dobbeltimplikasjon

La p og q være to utsagn. Utsagnet $p \leftrightarrow q$ kalles en dobbeltimplikasjon (eng: a biconditional statement) og leses normalt som «p hvis og bare hvis q» (eng: p if and only if q). Det er sant når p og q har like verdier og er usant når de har forskjellige verdier.

Sannhetsverditabell:

p	q	$p \leftrightarrow q$
S	S	S
S	U	U
U	S	U
U	U	S

Operatoren $\leftrightarrow$ er kommutativ, dvs $p \leftrightarrow q$ er det samme som $q \leftrightarrow p$. $p \leftrightarrow q$ kan uttrykkes som:

- «p er nødvendig og tilstrekkelig for q»
- «p impliserer q og q impliserer q»
- «hvis p, så q og omvendt»
- «p iff q» (if er en forkortelse for if and only if
- «p hviss q» (hviss = hvis og bare hvis)

Mer om bruk av sannhetsverditabeller

Påstanden at $\neg(p \vee q)$ er logisk lik $\neg p \wedge \neg q$, kalles DeMorgans lov og kan bevises ved hjelp av en sannhetsverditabell:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$
S	S	U	U	S	U	U
S	U	U	S	S	U	U
U	S	S	U	S	U	U
U	U	S	S	U	S	S

like

Antall rader i en sannhetsverditabell

Anta at vi har n forskjellige utsagn ($p, q, r, \ldots$) i et sammensatt utsagn. Da må tabellen (i tillegg til overskriftsraden) inneholde 2^n rader.

Avsnitt 1.2 fra Læreboken

Anvendelser av utsagnslogikk

1) I de vanlige søkemotorene kan en bruke AND, OR og NOT for å lage mer presise søkestrenger.

2) Fra språk til matematikk

a) Gitt setningen:

«Du kan som student få tilgang til internett på skolen bare hvis du er datastudent eller du ikke går i 1. klasse»

p: Du kan som student få tilgang til internett på skolen

q: du er datastudent

r: går i 1. klasse

Dette kan oversettes til: p bare hvis (q eller ikke r)

eller til: $p \to (q \vee \neg r)$. Det kontrapositive blir:

$\neg(q \vee \neg r) \to \neg p$ eller $\neg q \wedge \neg\neg r \to \neg p$. Det blir

$$\boxed{(\neg q \wedge r) \to \neg p}$$

Tilbake til språk:

Hvis du ikke er datastudent og går i 1. klasse, så får du ikke tilgang til internett.

b) Gitt setningen:

«Du kan ikke kjøre berg-og-dalbane hvis du er kortere enn 122 cm (4 feet) med mindre du er minst 16 år»

p : du kan kjøre berg-og-dalbane
q : du er kortere enn 122 cm
r : du er minst 16 år

Setningen kan "oversettes til": $\neg p$ hvis (q med mindre r).
Uttrykket "med mindre" kan uttrykkes som "og ikke".
Dermed blir det: $(q \wedge \neg r) \Rightarrow \neg p$. Det kontrapositive blir
$\neg\neg p \Rightarrow \neg(q \wedge \neg r)$. Det blir videre lik $\boxed{p \to (\neg q \vee r)}$.

Tilbake til språk: Hvis du kan kjøre berg-og-dalbane, er du høyere enn 122 cm eller minst 16 år.