La relasjonen R på mengden A være en delvis ordning, dvs. R er refleksiv, antisymmetrisk og transitiv.
Hvis A har en slik relasjon, sier vi at <u>A er delvis ordnet</u>.

<u>Sammenlignbarhet</u>

Hvis $(a,b) \in R$ eller $(b,a) \in R$, sier vi at a og b er sammenlignbare (eng: comparable).

<u>Eksempel</u> La $A = \{1, 2, 4, 5, 12, 20\}$ og $R = \{(a,b) \mid a \text{ går opp i } b\}$.

4 og 12 er sammenlignbare fordi $(4,12) \in R$.
4 og 5 er ikke sammenlignbare fordi hverken $(4,5) \in R$ eller $(5,4) \in R$.

Hvis alle a og b fra A er sammenlignbare, sier vi at A er <u>totalt ordnet</u>.

<u>Eksempel</u> La A være heltallene med $R = \{(a,b) \mid a \leq b\}$.
Dette er en total ordning fordi hvis vi velger to hele tall a og b så er enten $a \leq b$ eller $b \leq a$.

<u>Ordning og ulikhet</u>

Vi bruker symbolene $\prec$ og $\precsim$ som abstrakte ulikhetstegn.

Vi skriver $a \precsim b$ hvis $(a,b) \in R$ og
$a \prec b$ hvis $(a,b) \in R$ og $a \neq b$.

Vi sier også at a er "mindre enn" b hvis $a \prec b$ og at a er "mindre enn eller lik" b hvis $a \preceq b$.

Leksikografisk ordning

Symbolet på trykk: $\prec$

La A_1 og A_2 være to mengder som er delvis ordnet.
Da defineres flg. ordning på produktmengden $A_1 \times A_2$:

$$(a_1, a_2) \prec (b_1, b_2) \text{ hvis}$$

$$a_1 \prec b_1 \text{ eller } (a_1 = b_1 \text{ og } a_2 \prec b_2).$$

Eksempel 1 La A være de hele tallene. La
$(1,2) \in A \times A$, $(1,3) \in A \times A$ og $(2,1) \in A \times A$.

Er $(1,2) \prec (2,1)$? Ja, fordi $1 < 2$.

Er $(1,2) \prec (1,3)$? Ja, fordi $1 = 1$ og $2 < 3$.

Er $(2,1) \prec (1,3)$? Nei, fordi $2 \not< 1$.

Eksempel La A være bokstavene fra a til å med vanlig alfabetisk ordning.

La $(f,g) \in A \times A$, $(h,a) \in A \times A$ og $(f,m) \in A \times A$.

Er $(f,g) \prec (h,a)$? Ja, fordi f kommer foran h i alfabetet.

Er $(f,g) \prec (f,m)$? Ja, fordi $f = f$ og g kommer foran m i alfabetet.

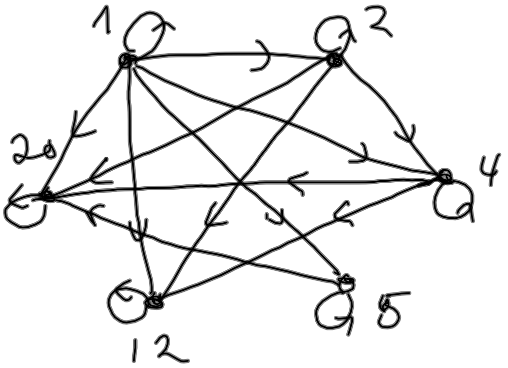
Med navn:
ANNA kommer foran ANNE

Hasse diagram

Eksempel La $A = \{1, 2, 4, 5, 12, 20\}$ og

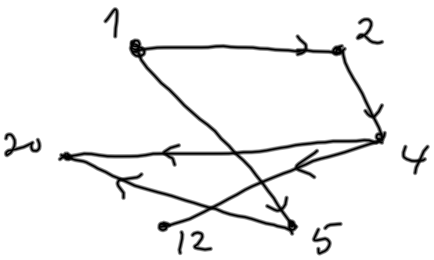
$R = \{(a,b) \mid a \text{ går opp i } b\}$.

Grafen G_R til R:

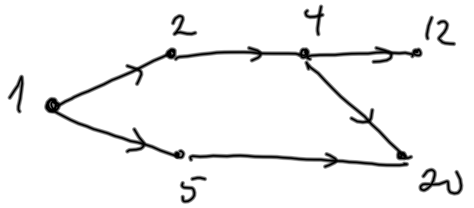


Vi lager et Hasse diagram ved å fjerne sløyfene og ved å fjerne "den tredje kanten" i "trekanter".

Da sitter vi igjen med:



Dette kan endres til:



Dette er et Hasse diagram

Maksimale og minimale elementer

Et element $a \in A$ er maksimalt hvis det ikke finnes noen b slik at $a \prec b$. Et element a er minimalt hvis det ikke finnes noen b slik at $b \prec a$.

Eksempel $A = \{1, 2, 4, 5, 12, 20\}$ og $R = \{(a,b) \mid a \text{ går opp i } b\}$.

Har A noen maksimale elementer? Ja, 12 og 20 er maksimale.

Har A noen minimale elementer? Ja, 1 er minimalt.

Et største og minste element

Et element $a \in A$ er et største element hvis $b \precsim a$ for alle $b \in A$.

Et element $a \in A$ er et minste element hvis $a \precsim b$ for alle $b \in A$.

Eksempel $A = \{1, 2, 4, 5, 12, 20\}$ og $R = \{(a,b) \mid a \text{ går opp i } b\}$.
Har A et største element? Nei! 20 kan ikke være størst siden $12 \not\precsim 20$.
Har A et minste element? Ja, tallet 1 siden $1 \precsim a$ for alle $a \in A$.

Øvre og nedre grense (eng: upper and lower bound)

Gitt a og b i A. Et element $c \in A$ er en øvre grense for a og b hvis $a \precsim c$ og $b \precsim c$.
Et element d er en nedre grense for a og b hvis $d \precsim a$ og $d \precsim b$.

Eksempel (som over)

Har 12 og 20 en øvre grense? Nei, fordi det finnes ingen c slik at $12 \precsim c$ og $20 \precsim c$.
Men 12 og 20 har en nedre grense. La f.eks. $d = 4$. Da har vi $d \precsim 12$ og $d \precsim 20$. Svaret er ja.

Topologisk sortering

En rekkefølge av elementene i A slik at hvis $a \prec b$ så kommer a foran b i rekkefølgen, kalles en topologisk sortering.

Eksempel

La $A = \{1, 2, 4, 5, 12, 20\}$ og $R = \{(a,b) \mid a \text{ går opp i } b\}$.

Enhver rekkefølge som oppfyller at 1 kommer først, 2 kommer foran 4, 4 kommer foran 12 og 20 og 5 kommer foran 20, utgjør en topologisk sortering. Det gir flg. muligheter:

1, 2, 4, 5, 12, 20

1, 2, 4, 5, 20, 12

1, 2, 4, 12, 5, 20

1, 2, 5, 4, 12, 20

1, 2, 5, 4, 20, 12

1, 5, 2, 4, 12, 20

1, 5, 2, 4, 20, 12