Diskret matematikk – onsdag 17. sept. 2014

Mer om funksjoner

En generell funksjon er på formen $f: A \to B$. Hvis både A og B er tallmengder, kaller vi vanligvis f en tallfunksjon. Flg. tallfunksjoner vil en kunne få bruk for i ulike datafag.

Funksjonssymbol	Funksjonsnavn
$f(x) = a$	Den konstante funksjonen
$f(x) = ax + b$	Den lineære funksjonen
$f(x) = ax^2 + bx + c$	Den kvadratiske funksjonen
$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$	Polynomfunksjonen av grad *n*
$f(x) = \sqrt{x}$	Kvadratrotfunksjonen
$f(x) = \log_2 x$	Logaritmefunksjonen med grunntall 2
$f(x) = \ln x$	Den naturlige logaritmefunksjonen
$f(x) = x \log_2 x$	Den lineæritmiske funksjonen (kalles også den loglineære funksjonen)
$f(x) = 2^x$	Eksponentialfunksjonen med grunntall 2
$f(x) = e^x$	Eksponentialfunksjonen med grunntall *e*
$f(x) = \lceil x \rceil$	Takfunksjonen (eng: ceiling)
$f(x) = \lfloor x \rfloor$	Gulvfunksjonen (eng: floor)

Avrundingsfunksjonene

Tak

La x være et desimaltall, dvs. $x \in \mathbb{R}$. Funksjonen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}$ er de hele tallene) som betegnes med $f(x) = \lceil x \rceil$, er definert som avrundingen av x oppover til nærmeste heltall. Hvis x er et heltall, blir $\lceil x \rceil = x$.

Symbolet $\lceil\ \rceil$ kalles et tak (eng: ceiling)

Eksempler: $x = 3{,}14$, $\lceil x \rceil = 4$ $\quad$ $x = 0{,}0001$, $\lceil x \rceil = 1$
$x = -1{,}1$, $\lceil x \rceil = -1$ $\quad$ $x = -3$, $\lceil x \rceil = -3$

Java:
```
double x = 3.14;            // x er et desimaltall
double n = Math.ceil(x);    //avrundingen
System.out.println(n);      // utskrift: 4.0
```

Her blir resultatet egentlig ikke et heltall, men et desimaltall der desimalene er "tatt vekk".

Gulv

Funksjonen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ som betegnes med $f(x) = \lfloor x \rfloor$, er definert som avrundingen av x nedover til nærmeste heltall. Hvis x er et heltall, er $\lfloor x \rfloor = x$.

Symbolet $\lfloor \ \rfloor$ kalles et gulv (eng: floor).

Eksempler $\quad x = 3{,}14$, $\lfloor x \rfloor = 3$ $\quad x = 0{,}0001$, $\lfloor x \rfloor = 0$.

$x = -1{,}1$, $\lfloor x \rfloor = -2$ $\quad x = -3$, $\lfloor x \rfloor = -3$

Java:

```
double x = -1.1;              // x er et desimaltall
double n = Math.floor(x);     //avrundingen
System.out.println(n);        // utskrift: -2.0
```

Resultatet her blir egentlig ikke et heltall, men et desimaltall der desimalene er "tatt vekk".

Grafen til en funksjon

Gitt funksjonen $f: A \to B$. Grafen G_f til f er den delmengden av $A \times B$ som er gitt ved

$$G_f = \{ (a, b) \mid a \in A, b = f(a) \}$$

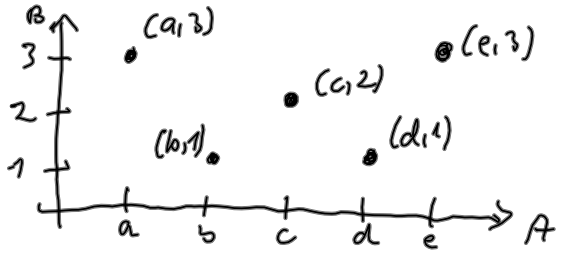
Grafen er med andre ord en mengde av par. Dette kan også illustreres ved hjelp av et koordinatsystem.

Eksempel $\quad$ La $A = \{a, b, c, d, e\}$ og $B = \{1, 2, 3\}$.

La f være definert ved $f(a) = 3$, $f(b) = 1$, $f(c) = 2$, $f(d) = 1$, $f(e) = 3$.

$$G_f = \{ (a,3), (b,1), (c,2), (d,1), (e,3) \}.$$

Koordinatsystem:



Avsnitt 2.4 fra læreboken — følger og rekker

En følge (eng: sequence) er en oppramsing av tall. Hvert tall i oppramsingen har et nummer eller en posisjon som er bestemt av hvor tallet står. Det første tallet har nr. eller posisjon 0. (Noen ganger er det mer aktuelt å si at det første tallet har nr. eller posisjon 1.)

Tallene i en følge kalles <u>ledd</u> (eng: term).

En generell <u>endelig</u> følge kan settes opp slik

$$a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n, \ldots\ldots, a_N$$

a_0: første ledd; a_n: det generelle leddet; a_N: siste ledd

Denne følgen har <u>N+1</u> ledd.

En generell <u>uendelig</u> følge kan settes opp slik:

$$a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n, \ldots\ldots\ldots,$$

a_0: første ledd; a_n: det generelle leddet; det finnes ikke noe siste ledd

En flg. kan skrives slik på kortform:

$$\{a_n\}, n \geq 0 \quad \text{eller eventuelt} \quad \{a_n\}, n \geq 1$$

Andre bokstaver enn <u>n</u> brukes også.

<u>Eksempel</u>

$\{n^2\}, n \geq 0$ betyr $0, 1, 4, 9, 16, \ldots\ldots$

$\{\frac{1}{k}\}, k \geq 1$ betyr $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\ldots$

<u>OBS</u> La alle a_n være tall fra en tallmengde S. Da kan følgen $\{a_n\}, n \geq 0$ ses på som en funksjon f fra $\mathbb{N}$ (de naturlige tallene) til S. Dvs. $f(n) = a_n$

Geometriske følger

En geometrisk følge er en følge der forholdt (brøken) mellom et vilkårlig ledd og det foregående leddet er konstant. Hvis a_n er det generelle leddet, betyr det at a_n/a_{n-1} er konstant for alle $n \geq 1$.

Eksempel 1 Gitt følgen $1, 2, 4, 8, 16, \ldots\ldots$

Vi ser at $\frac{2}{1} = 2$, $\frac{4}{2} = 2$, $\frac{8}{4} = 2$, osv. Dette er derfor en geometrisk følge.

Eksempel 2 Gitt følgen $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \frac{1}{256}, \ldots$

Vi ser at $\frac{\frac{1}{4}}{1} = \frac{1}{4}$, $\frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}$, $\frac{\frac{1}{64}}{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}$, osv.

Dette er derfor en geometrisk følge.

Eksempel 3 Gitt følgen $1, 4, 9, 16, 25, \ldots$

Vi ser at $\frac{4}{1} = 4$, $\frac{9}{4} = 2{,}25$, $\frac{16}{9} = 1{,}78$, osv.

Dette er derfor ikke en geometrisk følge.

Generell formel

Det generelle leddet a_n i en geometrisk følge er alltid gitt på denne formen:

$$\boxed{a_n = a r^n, \quad n \geq 0}$$

Her er $\underline{a}$ det første leddet i følgen (dvs. $a_0 = a$) og $\underline{r}$ det faste forholdet mellom et ledd og det foregående leddet.

Eksempler

1) La $a = 1$ og $r = 2$. Da blir $a_n = 2^n$. Det gir følgen $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$
2) La $a = 2$ og $r = 3$. Da blir $a_n = 2 \cdot 3^n$. Det gir følgen $2, 6, 18, 54, \ldots$
3) La $a = 3$ og $r = -2$. Da blir $a_n = 3(-2)^n$. Det gir følgen $3, -6, 12, -24, \ldots$

Aritmetiske følger

En følge kalles en aritmetisk følge hvis differensen mellom et vilkårlig ledd og det foregående leddet er konstant. Det betyr at hvis a_n er det generelle leddet, så er $a_n - a_{n-1}$ fast for alle $n \geq 1$.

Eksempel 1 Gitt følgen 2, 4, 6, 8, 10, ... (partallene)

Vi ser at $4-2=2$, $6-4=2$, $8-6=2$, osv. Dette er derfor en aritmetisk følge.

Generell formel

Det generelle leddet i en aritmetisk følge har alltid formen:

$$\boxed{a_n = a + dn \;,\; n \geq 0}$$

Her er a det første leddet (dvs. $a_0 = a$) og d den faste differensen mellom et ledd og det foregående leddet.

I Eksempel 1 over er $a = 2$ og $d = 2$. Dermed $a_n = 2 + 2n$.

Eksempel 2 La $a = 5$, $d = 3$ og $a_n = 5 + 3n$. Det gir den aritmetiske følgen 5, 8, 11, 14, 17, ...

Differensligninger

En spesiell type følger får vi ved hjelp av en differensligning (eng: reccurence relation). Da kan f.eks. a_n være gitt slik:

$$a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} \;,\; a_0 = 1 \;,\; a_1 = 2$$

Dermed $a_2 = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 7$, $a_3 = 2 \cdot 7 + 3 \cdot 2 = 20$, osv.

Slike følger skal vi studere nærmere i Kapittel 8.

Det er mange typer følger som er av interesse i ulike datafag. Det er geometriske følger, aritmetiske følger og andre typer følger. Her er noen viktige følger:

Det n-te leddet	De første leddene
n	$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots$
n^2	$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, \dots$
n^3	$1, 8, 27, 64, 125, \dots$
2^n	$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024$
3^n	$1, 3, 9, 81, 243, 729$
$n!$	$1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, \dots$
Fibonacci-tallene	$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$
$\left(\frac{1}{2}\right)^n$	$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \dots$
$\frac{1}{n}$	$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \dots$
$\frac{1}{n^2}$	$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \frac{1}{36}, \dots$