Kombinasjoner av relasjoner

En relasjon R på en mengde A er en delmengde av $A \times A$.

La R og S være to relasjoner på A. Da vil også $R \cap S$, $R \cup S$, $R - S$, $S - R$ og $R \oplus S$ bli relasjoner på A.

La M_R og M_S være matrisene til R og S. Da har vi

$$M_{R \cap S} = M_R \wedge M_S$$

$$M_{R \cup S} = M_R \vee M_S$$

Sammensetningen av to relasjoner

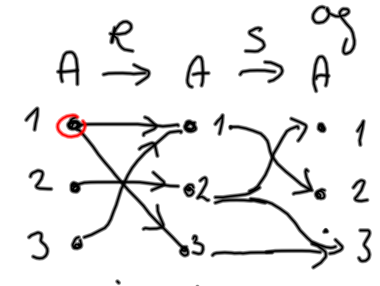
La R og S være relasjoner på A. Sammensetningen av R og S betegnes med $S \circ R$ (leses som S ring R) og er relasjonen på A definert ved:

$$S \circ R = \{ (a,c) \mid a \in A, c \in A \text{ slik at det finnes } b \in A \text{ der } (a,b) \in R \text{ og } (b,c) \in S \}$$

La M_R og M_S være matrisene til R og S. Da gjelder:

$$\boxed{M_{S \circ R} = M_R \odot M_S}$$

Eksempel La $A = \{1,2,3\}$, $R = \{(1,1), (1,3), (2,2), (3,1)\}$ og $S = \{(1,2), (2,1), (2,3), (3,3)\}$



Følg pilene!

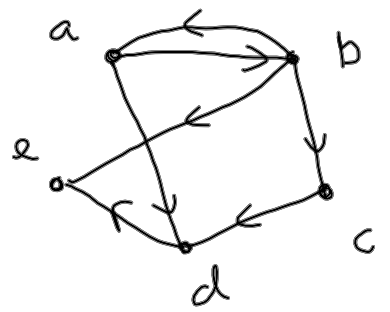
$$S \circ R = \{ (1,2), (1,3), (2,1), (2,3), (3,2) \}$$

$$\begin{array}{c} M_R \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \odot \begin{array}{c} M_S \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} M_{S \circ R}$$

En vei (eng: path) i en relasjonsgraf

Eksempel La $A = \{a, b, c, d, e\}$ og R relasjonen på A gitt ved $R = \{(a,b), (a,d), (b,a), (b,c), (b,e), (c,d), (d,e)\}$.

Grafen G_R til R:



Det går en vei fra et punkt til et annet punkt hvis det er mulig å gå fra det første til det andre punktet ved å følge kanter i pilenes retning.

Veien består av endepunktene (start/slutt) og de punktene vi passerer. Veiens lengde er antall kanter.

Spørsmål 1: Hvor mange veier finnes det fra a til e?

1) a, b, e 2) a, d, e 3) a, b, c, d, e 4) a, b, a, d, e 5) osv.

Spørsmål 2: Hvilke par (x,y) er det som har en vei med lengde 2 fra x til y?

1) (a,e) 2) (a,c) 3) (a,a) 4) (b,d) 5) (b,b) 6) (c,e)

Vi kan også finne dette ved et matriseprodukt.

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Vi finner at } M_R \odot M_R = M_R^{[2]} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

F.eks. (c,e)

Generell regel

La $M_R^{[n]} = \underbrace{M_R \odot M_R \odot \cdots \odot M_R}_{n \text{ ganger}}$. Da vil det finnes en vei med lengde n fra x til y hvis det står 1 på plassen til (x,y) i matrisen $M_R^{[n]}$.

Avsnitt 9.4 i læreboken   Utvidelser av relasjoner

Hvis en relasjon R på en mengde A ikke er f.eks. refleksiv, symmetrisk eller transitiv, kan den utvides til å oppfylle en eller alle disse.

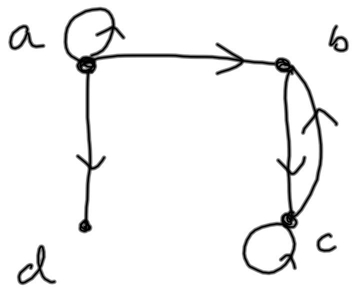
1) Den blir refleksiv ved å ta med de parene som mangler, dvs. de der paret har like elementer.

2) Den blir symmetrisk ved å ta med parene som mangler, dvs. hvis $(a,b) \in R$, men $(b,a) \notin R$, så må (b,a) tas med.

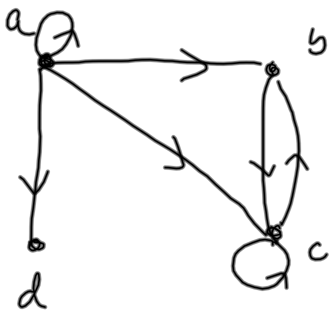
3) Den blir transitiv ved å ta med de parene som mangler, dvs. hvis $(a,b) \in R$ og $(b,c) \in R$, men $(a,c) \notin R$, så må (a,c) tas med.

<u>Eksempel</u> La $A = \{a, b, c, d\}$ og
$R = \{(a,a), (a,b), (b,c), (c,b), (a,d), (c,c)\}$.

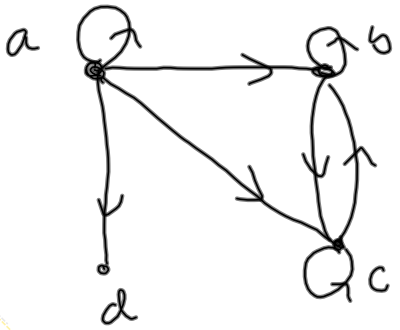
Grafen G_R:



Vi må ha med (a,c) $\longrightarrow$



Vi må ha med (b,b) $\longrightarrow$



$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

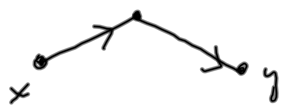
Denne er transitiv.

Den minste mulige utvidelsen som gjør en relasjon R transitiv kalles kalles den <u>transitive tillukningen</u> til R.

Tilsvarende for refleksivitet og symmetri. Da kalles det den <u>refleksive tillukningen</u> og den <u>symmetriske tillukningen</u>.

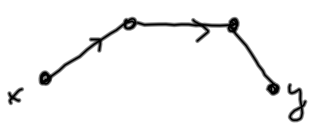
<u>Formel</u> La M_R være matrisen til R. Anta at M_R er en $n \times n$-matrise. Da vil matrisen $M_R \vee M_R^{[2]} \vee \cdots \vee M_R^{[n]}$ være matrisen til den <u>transitive tillukningen</u> til R.

<u>Begrunnelse:</u> $M_R^{[2]}$ inneholder de parene (x,y) der det går en vei med lengde 2 fra x til y. Dvs. slik:

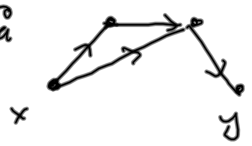


Men da må (x,y) være med. Derfor $M_R \vee M_R^{[2]}$.

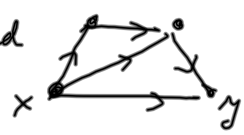
$M_R^{[3]}$ inneholder parene (x,y) der det går en vei med lengde 3 fra x til y. Dvs. slik:



Men da må vi ha:



og dermed



Med andre ord må (x,y) være med. Derfor $M_R \vee M_R^{[2]} \vee M_R^{[3]}$. Osv.