Diskret matematikk – onsdag 10. september 2014

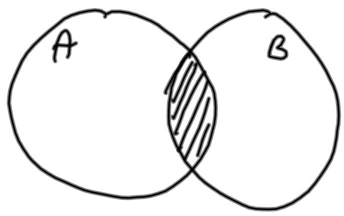
Avsnitt 2.2 fra læreboken – Mengdeoperasjoner

Snittet av to mengder (eng: intersection)

Snittet av to mengder A og B betegnes med $A \cap B$ (leses som A snitt B) og er mengden av de elementene som er i både A og B (dvs. det som er felles for A og B).

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

Venn-diagram



$A \cap B$ er det som er skravert ////

Eksempel

$A = \{1,2,3,4,5\}$

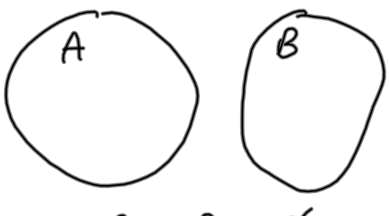
$B = \{7,1,3,8,5,6\}$

$A \cap B = \{1,3,5\}$

Disjunkte mengder (eng: disjoint)

To mengder A og B er disjunkte hvis $A \cap B = \emptyset$, dvs. de har ingenting felles.

Venn-diagram



$A \cap B = \emptyset$

Eksempel

$A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{5,6,7,8\}$

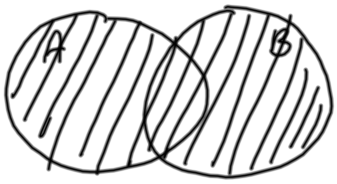
$A \cap B = \emptyset$.

Unionen av to mengder (eng: union)

Unionen av to mengder A og B betegnes med $A \cup B$ (leses som A union B) og er mengden av de elementene som er i A eller i B (eller i begge).

$A \cup B = \{x \mid x \in A \lor x \in B\}$

Venn-diagram

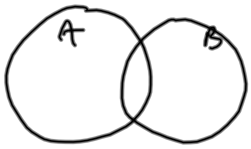


$A \cup B$ er det som er skravert ////

Eksempel $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,
$B = \{7, 1, 3, 8, 5, 6\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

Antallet elementer i en union



$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Eksempel $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{7, 1, 3, 8, 5, 6\}$

$|A| = 5$, $|B| = 6$, $|A \cap B| = 3$, $|A \cup B| = 8$

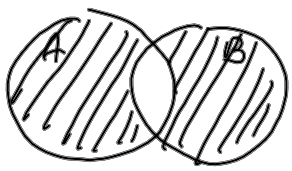
Vi ser at $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

Eksklusiv union (kalles også en symmetrisk differens)

Den eksklusive unionen til to mengder A og B betegnes med $A \oplus B$ (leses som A eksklusiv union B) og er mengden av de elementene som er i A eller i B, men *ikke* i begge.

Venn-diagram

$A \oplus B = \{x \mid x \in A \oplus x \in B\}$



$A \oplus B$ er det som er skravert ////

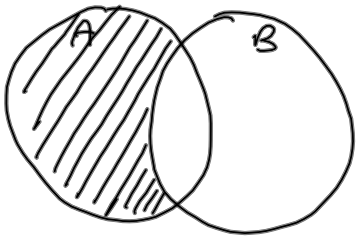
Eksempel $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{7, 1, 3, 8, 5, 6\}$
$A \oplus B = \{2, 4, 6, 7, 8\}$

Differensen mellom to mengder (eng: difference)

Differensen mellom to mengder A og B betegnes med $A-B$ (leses som A minus B) og er mengden av de elementene som er i A, men ikke i B.

Venn-diagram

$$A-B=\{x \mid x\in A \land x\notin B\}$$



A − B er det som er skravert //////

Eksempel $A=\{1,2,3,4,5\}$
$B=\{7,1,3,8,5,6\}$
$A-B=\{2,4\}$

OBS $A\oplus B$ kalles som sagt også en symmetrisk differens. Det kommer av flg. likhet:

$$A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)$$

Formler for antallet elementer i mengder

1) $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$

2) $|A-B|=|A|-|A\cap B|$

3) $|A\oplus B|=|A-B|+|B-A|$

En universalmengde

Mengdene våre er normalt delmengder av en større mengde. Denne kaller vi for universalmengden. Vi bruker ofte bokstaven U for den.

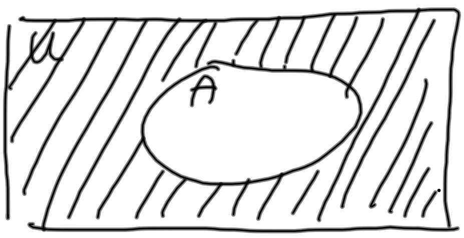
Eksempel $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{7,1,3,8,5,6\}$

Her er det naturlig å se på mengden av de hele tallene som universalmengden.

Komplementet til en mengde

La A være en delmengde av en universalmengde U. Komplementet til A (mhp. U) betegnes med $\bar{A}$ (leses som A komplement) og er mengden av de elementene som er i U, men ikke i A, dvs. $U-A$.

Venn-diagram



$\bar{A}$ er del som er skravert /////

OBS: $|\bar{A}| = |U| - |A|$

Et praktisk eksempel

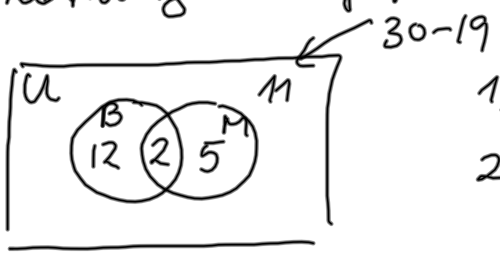
I en klasse med 30 studenter er det 14 som har bil, 7 som har motorsykkel og 2 som har begge deler.

Spørsmål: 1) Hvor mange har kun bil.
2) Hvor mange har ingen av delene.

La B være de som har bil og M de som har motorsykkel.

1) Finn $|B-M|$ 2) Finn $|\overline{B \cup M}|$

a) Løsning ved hjelp av Venn-diagram.



1) $|B-M| = |B| - |B \cap M| = 12$

2) $|\overline{B \cup M}| = 11$

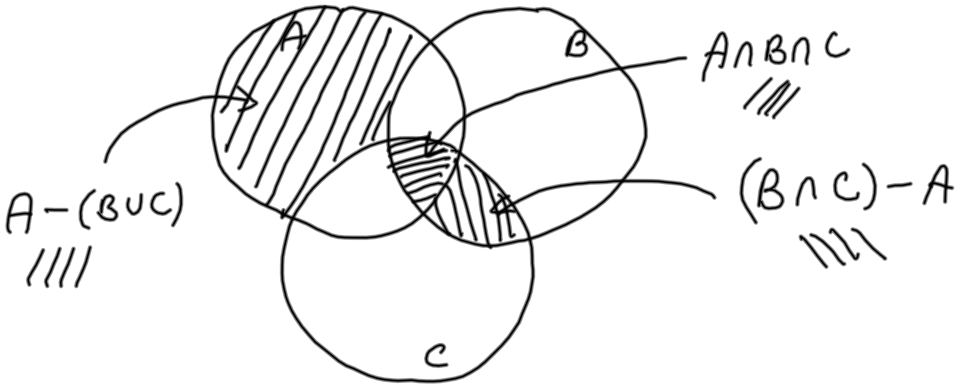
b) Løsning ved hjelp av formler

1) $|B-M| = |B| - |B\cap M| = 14 - 2 = 12$

2) $|\overline{B \cup M}| = |U| - |B \cup M| = |U| - (|B| + |M| - |B \cap M|)$
$= 30 - (14+7-2) = 30 - 19 = 11$

Tre mengder

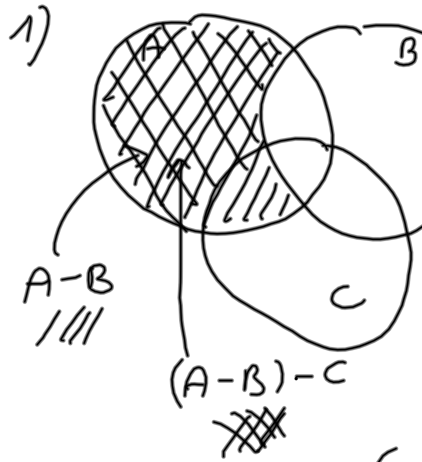
Venn-diagram for tre mengder A, B og C må tegnes slik for at alle muligheter skal være dekket:

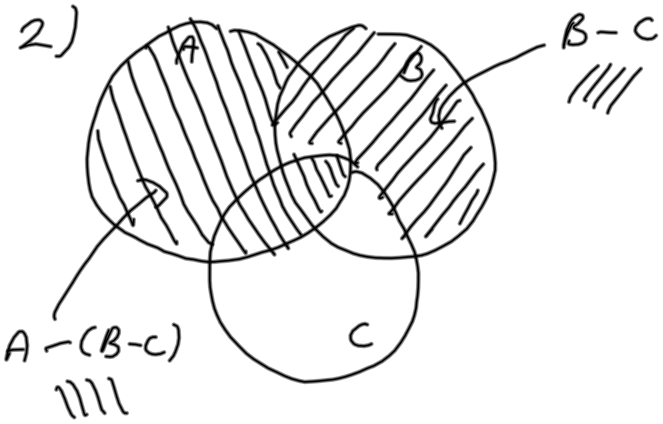


Eksempel

Er flg. to mengder like?

1) $(A-B)-C$ 2) $A-(B-C)$





$$(A-B)-C \neq A-(B-C)$$

Antallet elementer i $A \cup B \cup C$

$$|A \cup B \cup C| = |A|+|B|+|C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Hvorfor er denne formelen riktig? I summen $|A|+|B|+|C|$ har vi fått med det i $A \cap B \cap C$ tre ganger og det i $A \cap B$, $A \cap C$ og $B \cap C$, men ikke i $A \cap B \cap C$, to ganger. Derfor $-|A \cap B|-|A \cap C|-|B \cap C|$. Men da har vi fjernet det i $A \cap B \cap C$ tre ganger. Derfor $+|A \cap B \cap C|$

Mengdeidentiteter

De Morgans lover

1) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

2) $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

Det finnes mange slike mengdeidentiteter. Flg. tabell som er hentet fra læreboken, viser de viktigste:

TABLE 1 Set Identities.

Identity	*Name*
$A \cup \emptyset = A$ $A \cap U = A$	Identity laws
$A \cup U = U$ $A \cap \emptyset = \emptyset$	Domination laws
$A \cup A = A$ $A \cap A = A$	Idempotent laws
$\overline{(\overline{A})} = A$	Complementation law
$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$	Commutative laws
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	Associative laws
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	Distributive laws
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	De Morgan's laws
$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$	Absorption laws
$A \cup \overline{A} = U$ $A \cap \overline{A} = \emptyset$	Complement laws

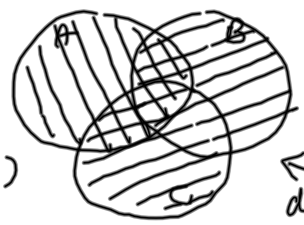
De kan f.eks. vises ved hjelp av Venn-diagram.

Distributiv lov: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

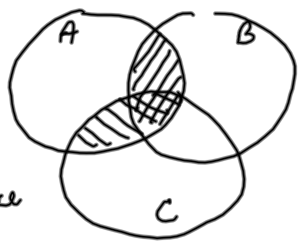
$B \cup C$ ≡

A \\\\

$A \cap (B \cup C)$



de er like



$A \cap B$ ////

$A \cap C$ \\\\

$(A \cap B) \cup (A \cap C)$ er skravert minst én vei.