Regneregler for binære tall

Regel: $0+0=0$, $0+1=1$, $1+0=1$, $1+1=10$ (0 og 1 i mente), $1+1+1=11$ (1 og 1 i mente).

Addisjon av to binære tall

Eksempel 1

$$\begin{array}{rr} a = & 10101110111_2 \\ b = & 1001101_2 \\ \hline a+b = & 10111000100_2 \end{array}$$

Eksempel 2

$$\begin{array}{rr} a = & 11001100110_2 \\ b = & 10100110101_2 \\ \hline a+b = & 101110011011_2 \end{array}$$

Subtraksjon

Eksempel 1

$$\begin{array}{rr} a = & 101011\cancel{1}0111_2 \\ b = & 1001101_2 \\ \hline a-b = & 10100101010_2 \end{array}$$

Eksempel 2

$$\begin{array}{rr} a = & \cancel{1}0\cancel{1}0000\cancel{1}01_2 \\ b = & 11111011_2 \\ \hline a-b = & 110001010_2 \end{array}$$

Negative binære tall, to-komplement og fortegnsbit

Både positive og negative hele tall av typen int i Java bruker 32 binære siffer. La f.eks. $a=15$. Det er representert slik:

$\underbrace{0000\ldots\ldots00}_{28\text{ 0-er}}1111_2$

Hvordan representeres -15? Her brukes to-komplement og fortegnsbit. Den første (av de 32) bitene kalles fortegnsbiten (fortegnssiffer).

Regel: Hvis fortegnsbiten er 1, så er tallet negativt og hvis den er 0, er tallet ikke-negativt (dvs. 0 eller positivt).

Komplement

Gitt en talltype med et fast antall biter, f.eks. n biter.

Hvis et tall er satt opp med n biter (der ledende 0-er er tatt med), så får vi komplementet til tallet ved å la alle 0-ene bli 1-ere og alle 1-ere bli 0-er.

Eksempel

$$n = 8$$

$$a = 00110011_2$$

$$\text{Komplementet til } a = 11001100_2$$

Regel for å finne binærrepresentasjonen til et negativt tall

1) Gitt et negativt heltall (f.eks $a = -15$).
2) Finn binærrepresentasjonen til $-a$ (f.eks $-a = 15$).
3) Ta komplementet til det vi fikk i 2).
4) Legg til 1 (binæraddisjon) til komplementet, dvs. til det vi fikk i 3)
5) Resultatet er binærrepresentasjonen til a.

Eksempel

1) $a = -15_{10}$
2) $-a = 15_{10} = 000\cdots001111_2$
3) Komplementet: $111\cdots110000_2$
4) $+1$: $111\cdots110001_2$

Binærrepresentasjonen av -15 er derfor:

$$\underbrace{1111\cdots111}_{28\text{ 1-ere}}0001_2$$

<u>Samme regel gjelder motsatt vei</u>

Gitt at vi har binærrepresentasjonen til et negativt tall i et fast bitformat. Hvis vi tar komplementet og legger til 1, får vi binærrepresentasjonen til det tilsvarende positive tallet.

<u>Eksempel 1</u> Bitformat på 8 biter

$a = 11111111_2$ ← et negativt tall siden fortegnsbiten er 1

Komplementet til $a = 00000000_2$

$+1 = 00000001_2 = 1_{10}$

Dette betyr at $a = 11111111_2 = -1_{10}$

<u>OBS</u> -1_{10} i et bitformat på 32 biter består av 32 1-ere.

<u>Eksempel 2</u> Gitt det negative tallet $a = 10000000_2$ (8 biter).

$$\begin{array}{rcccccccc}
a = & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\text{Komplementet til } a = & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
+1 & & & & & & & & 1 \\
\hline
 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0_2
\end{array} = 128_{10}$$

Dette betyr at $a = 10000000_2 = -128_{10}$

Overflow

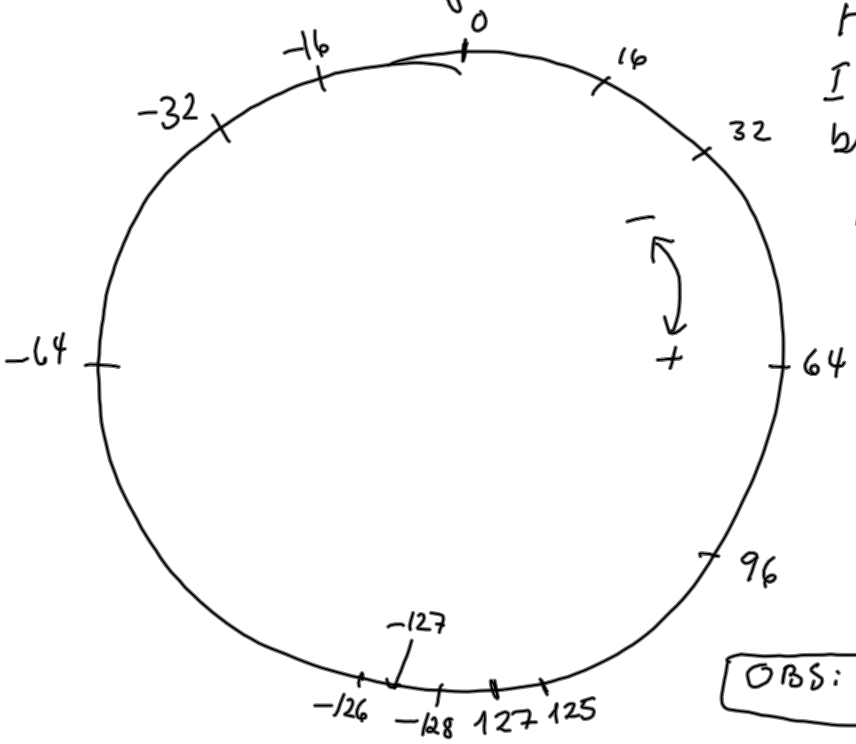
Gitt to tall i 8 biters format:

$$\begin{array}{rcl} & & \scriptstyle 1\,1\,\,\,1\,1 \\ a & = & 11001100 \\ b & = & 01111011 \\ \hline a+b & = & \cancel{1}01000111 \end{array}$$

OBS Hvis vi får flere biter ved en binæraddisjon enn antall biter i bitformatet, fjernes biter fra venstre slik at vi får det antallet biter som bitformatet sier.

Tallsirkelen

Vi bruker her 8 biter som fast bitformat.



Hva blir 125+5?
I vanlig regning blir det 130.

Men finner vi 125 på sirkelen og går 5 enheter med klokken. Da kommer vi til −126.

Dermed
$125+5=-126$

$\boxed{\text{OBS: } 130 \equiv -126 \pmod{256}}$

Eksempel Vi kan finne $-127-2$ ved å gå to enheter mot klokken fra -127. Da kommer vi til 127. Dermed $-127-2=127$.

Dette kan vi også finne ved binæraddisjon:

$$\begin{array}{rcl} -127_{10} & = & 10000001_2 \\ -2_{10} & = & 11111110_2 \\ \hline + & = & \cancel{1}01111111_2 = 127 \end{array}$$

Avsnitt 4.3 fra læreboken Primtall

Et heltall $p > 1$ kalles et primtall hvis kun 1 og p går i p.

Primtallsfølgen starter med:

$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, \ldots$

Aritmetikkens fundamentalsetning

Ethvert heltall større enn 1 er enten et primtall eller kan skrives på en entydig måte som et produkt av primtall der tallene i produktet settes opp i stigende rekkefølge. Dette produktet kalles tallets primtallsfaktorisering.

Eksempel

$$78 = 2 \cdot 39 = 2 \cdot 3 \cdot 13$$

$$126 = 2 \cdot 63 = 2 \cdot 3 \cdot 21 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = \underline{2 \cdot 3^2 \cdot 7}$$

$$200 = 2 \cdot 100 = 2 \cdot 2 \cdot 50 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 25 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = \underline{2^3 \cdot 5^2}$$

$$162 = 2 \cdot 81 = 2 \cdot 3 \cdot 27 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 9 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = \underline{2 \cdot 3^4}$$