2) Anta at det karakteristiske polynomet $r^2 = c_1 r + c_2$ har én løsning (sammenfallende røtter) r_0.

Da vil den generelle løsningen av differensligningen $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ $(c_2 \neq 0)$ være:

$$\boxed{a_n = \alpha r_0^n + \beta n r_0^n}$$

Hvis vi kjenner a_0 og a_1, kan vi finne α og β ved å løse flg. ligningssystem:

$$\boxed{\begin{aligned} \alpha &= a_0 \\ \alpha r_0 + \beta r_0 &= a_1 \end{aligned}}$$

Eksempel Gitt differensligningen $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$, $a_0 = 1$, $a_1 = 4$. Vi kan regne ut noen flere ledd:

$$a_2 = 4a_1 - 4a_0 = 4 \cdot 4 - 4 \cdot 1 = 12$$
$$a_3 = 4a_2 - 4a_1 = 4 \cdot 12 - 4 \cdot 4 = 32$$

Det karakteristiske polynomet: $r^2 = 4r - 4$,

$r^2 - 4r + 4 = 0$, $r = \dfrac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = 2$

Dermed $r_0 = 2$, dvs. kun én løsning.

Generell løsning: $a_n = \alpha 2^n + \beta n 2^n$. Vi finner α og β ved: $\alpha = 1$, $2\alpha + 2\beta = 4$.

Dermed $\beta = 1$.

Løsning: $a_n = 2^n + n 2^n = (n+1) 2^n$

Test: $a_2 = (2+1) \cdot 2^2 = 3 \cdot 4 = 12$ ok!

$a_3 = (3+1) 2^3 = 4 \cdot 8 = 32$ ok!

Hva blir a_{10}? $a_{10} = (10+1) 2^{10} = 11 \cdot 1024 = 11264$.

Ligningen av type 1

Dette er differensligningen på formen $a_n = c a_{n-1} + d$

Generell løsning for tilfellet $c \neq 1$:

$$\boxed{a_n = \alpha c^n + \frac{d}{1-c}}$$

Hvis vi kjenner a_0, finner vi α slik:

$$\boxed{\alpha = a_0 - \frac{d}{1-c}}$$

Eksempel Hanois tårn

Da fikk vi flg. ligning: $H_n = H_{n-1} + 1 + H_{n-1}$
$H_0 = 0$ $\qquad = 2H_{n-1} + 1$.

Generell løsning: $H_n = \alpha 2^n + \frac{1}{1-2} = H_n = \alpha \cdot 2^n - 1$.

Vi finner α: $\alpha = 0 - \frac{1}{1-2} = -(-1) = 1$.

Løsning: $\underline{H_n = 2^n - 1}$

Tilfellet $c = 1$: $a_n = a_{n-1} + d$

Generell løsning. $\boxed{a_n = a_0 + n d}$

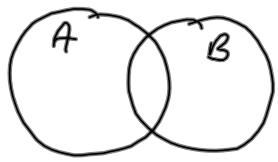
Avsnitt 8.5 fra læreboken Inklusjon – eksklusjon

Dette avsnittet inneholder litt repetisjon.

Antall elementer i en union av mengder:

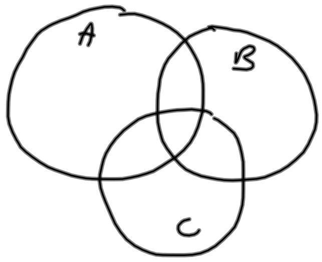
1) To mengder A og B.

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$



2) Tre mengder A, B og C

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$$



<u>Eksempel</u> Hvor mange av tallene fra 1 til 100 er delelige med 5, 7 eller 9.

La A, B og C være mengden av de som er delelige med henholdsvis 5, 7 og 9.

$|A| = 100 \text{ div } 5 = \left\lfloor \frac{100}{5} \right\rfloor = 20$

$|B| = 100 \text{ div } 7 = \left\lfloor \frac{100}{7} \right\rfloor = 14$

$|C| = 100 \text{ div } 9 = \left\lfloor \frac{100}{9} \right\rfloor = 11$

$|A \cap B| = 100 \text{ div } 35 = 2$

$|A \cap C| = 100 \text{ div } 45 = 2$

$|B \cap C| = 100 \text{ div } 63 = 1$

$|A \cap B \cap C| = 0.$

Svar: $|A \cup B \cup C| = 20 + 14 + 11 - 2 - 2 - 1 + 0 = 40.$

3) Fire mengder A, B, C og D.

$$|A \cup B \cup C \cup D| = |A| + |B| + |C| + |D| - |A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| - |B \cap C| - |B \cap D| - |C \cap D| + |A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D| - |A \cap B \cap C \cap D|$$

Avsnitt 9.1 og 9.3 fra læreboken Relasjoner

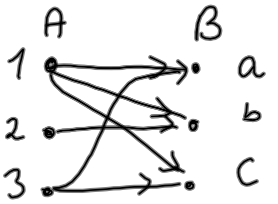
Gitt to mengder A og B. En relasjon R fra A til B (eller mellom A og B) er en delmengde av $A \times B$.

Husk: $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\}$.

Eksempel $A = \{1,2,3\}$ og $B = \{a,b,c\}$. Da er flg. delmengde $R \subseteq A \times B$ en relasjon fra A til B:

$$R = \{(1,a),\ (1,b),\ (1,c),\ (2,b),\ (3,a),\ (3,c)\}$$

Dette kan illustreres enten grafisk eller ved en tabell:



R	a	b	c
1	x	x	x
2		x	
3	x		x

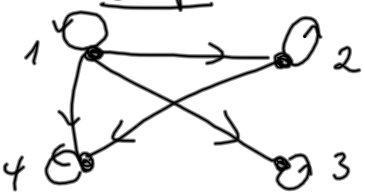
Hvis A og B er samme mengde, sier at relasjonen er på A istedenfor fra A til A.

Eksempel La $A = \{1,2,3,4\}$ og la R være mengden av par (a,b) slik at $a \mid b$ (dvs. at a går opp i b).
Da blir $R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,4),(3,3),(4,4)\}$

Vi kan også "illustrere" en relasjon ved å tegne dens graf eller sette opp dens matrise. Det er kun disse to måtene å "illustrere" relasjonen på vi skal bruke videre.

Vi bruker eksemplet over:

Grafen



Matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$