Diskret matematikk – onsdag 3. september 2014

Avsnitt 1.5 fra læreboken Nøstede (eng: nested) kvantorer

En utsagnsfunksjon P kan ha flere variabler, f.eks. P(x,y). Da får vi utsagn hvis vi bruker to kvantorer. Hvert av de fire flg. tilfellene gir et utsagn:

- $\forall x \forall y P(x,y)$ - for alle x og alle y gjelder P(x,y)
- $\forall x \exists y P(x,y)$ - for alle x finnes en y slik at P(x,y)
- $\exists x \forall y P(x,y)$ - det finnes en x slik for alle y gjelder P(x,y)
- $\exists x \exists y P(x,y)$ - det finnes en x og en y slik at P(x,y)

Eksempel 1 La funksjonen L(x,y) være gitt ved setningen «x elsker y» der x og y er personer. Hver gang vi setter inn bestemte personer for x og y blir L(x,y) enten sann eller usann. Hvis x er Kari og y er Per, kan det avgjøres om «Kari elsker Per» eller ikke.

Gitt utsagnet «alle elsker noen» (eng: everybody loves somebody). Hvordan kan det uttrykkes ved hjelp av L(x,y) og kvantorene ∀ og ∃?

Svar: $\forall x \exists y\, L(x,y)$

Hva med utsagnet «noen elsker alle» (eng: somebody loves everybody)?

Svar: $\exists x \forall y\, L(x,y)$

Hva med «ingen elsker Per»?

Svar: $\neg \exists x\, L(x, Per) \equiv \forall x\, \neg L(x, Per)$

Eksempel 2 La m og n være hele tall og la P(m,n) være gitt ved: m + n = 1. Ved hjelp av ∀ og ∃ får vi fire utsagn som vi kan avgjøre om er sanne eller usanne:

- $\forall m \forall n (m+n=1)$ usann
- $\forall m \exists n (m+n=1)$ sann
- $\exists m \forall n (m+n=1)$ usann
- $\exists m \exists n (m+n=1)$ sann

Negasjoner:

a) $\neg\forall x\forall y\, P(x,y) \equiv \exists x\neg\forall y\, P(x,y) \equiv \exists x\exists y\neg P(x,y)$
b) $\neg\forall x\exists y\, P(x,y) \equiv \exists x\neg\exists y\, P(x,y) \equiv \exists x\forall y\neg P(x,y)$
c) $\neg\exists x\forall y\, P(x,y) \equiv \forall x\neg\forall y\, P(x,y) \equiv \forall x\exists y\neg P(x,y)$
d) $\neg\exists x\exists y\, P(x,y) \equiv \forall x\neg\exists y\, P(x,y) \equiv \forall x\forall y\neg P(x,y)$

Eksempel:

Gitt: Alle elsker noen (everybody love somebody) $\forall x\exists y\, L(x,y)$

Negasjonen: Det er ikke slik at alle elsker noen $\neg\forall x\exists y\, L(x,y)$

Dette kan gjøres om til: Noen elsker ingen $\exists x\forall y\neg L(x,y)$
(eng: somebody loves nobody)

Utsagn	Når er det sant?	Når er det usant?
$\forall x\forall y P(x,y)$ $\forall y\forall x P(x,y)$	Når $P(x,y)$ er sann for hvert par x, y.	Når det finnes et par x, y som gjør $P(x,y)$ usann.
$\forall x\exists y P(x,y)$	Når det for hver x finnes en y som gjør $P(x,y)$ sann.	Når det finnes en x som gjør $P(x,y)$ usann for hver y.
$\exists x\forall y P(x,y)$	Når det finnes en x som gjør $P(x,y)$ sann for hver y.	Når det for hver x finnes en y som gjør $P(x,y)$ usann.
$\exists x\exists y P(x,y)$ $\exists x\exists y P(x,y)$	Når det finnes et par x, y som gjør $P(x,y)$ sann.	Når $P(x,y)$ er usann for hvert par x, y.

OBS Rekkefølgen på kvantorene er viktig.
Vi har generelt at $\forall x\exists y\, P(x,y) \not\equiv \exists x\forall y\, P(x,y)$

Alle $\rightarrow \forall$ Ikke alle $\rightarrow$ noen eller ingen
Noen $\rightarrow \exists$
Ingen $\rightarrow \neg\exists$

Avsnitt 1.8 fra læreboken – Innføring i bevisteknikk

(OBS: Avsnitt 1.6 og 1.7 inngår ikke i pensum)

Fra avsnitt 1.8 er det kun det som foreleses som er pensum.

Et bevis

Et bevis går ut på å demonstrere at en implikasjon $p \to q$ er sann. Her kalles p for premissen og q for konklusjonen. Det er nok å vise at hvis p er sann, så er q sann.

1) Direkte bevis

Vi antar at p er sann. Så bruker vi holdbare (eng: valid) argumenter til å vise at da er også q sann.

Eksempel Utsagn: Kvadratet av et oddetall er et oddetall.

La n være et heltall. Utsagnets premiss og konklusjon blir da:

p: n er et oddetall

q: n^2 er et oddetall

Vi skal vise $p \to q$. Anta at p er sann, dvs. at n er et oddetall. Husk at et oddetall alltid er lik to ganger et annet tall pluss en. Vi lar k være navnet på dette andre tallet, dvs. $n = 2k+1$. Vi får da

$$n^2 = (2k+1)^2 = (2k)^2 + 2\cdot(2k)\cdot 1 + 1^2 = 4k^2 + 4k + 1$$
$$= 2(2k^2+2k)+1.$$

Dermed er n^2 et oddetall siden det er lik to ganger et annet tall (dvs. $2k^2+2k$) pluss en. Det betyr at q er sann. Dermed er utsagnet bevist.

2) Bevis ved hjelp av kontraposisjon

Istedenfor å bevise at $p \to q$ er sann, viser vi at det kontrapositive utsagnet $\neg q \to \neg p$ er sant. Vi starter da med å anta at konklusjonen q er usann (dvs. at $\neg q$ er sann). Så bruker vi på vanlig måte holdbare argumenter til å vise at da må premissen p være usann.

EksempelLa m være et heltall.

Utsagn: Hvis m^2 er et oddetall, så er m et oddetall.

p: m^2 et oddetall

q: m et oddetall

Anta at konklusjonen q er usann, dvs. at m ikke er et oddetall. Men da må m være et partall. Dermed er m lik to ganger et annet tall, dvs. $m = 2k$. Men $m^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$. Det betyr at m^2 er et partall. Dvs. at p er usann. Dermed har vi vist $\neg q \rightarrow \neg p$ som er det samme som $p \rightarrow q$.

3) Bevis ved selvmotsigelse

Vi antar nå at premissen p er sann og at konklusjonen q er usann. Så bruker vi holdbare argumenter til å ende opp med noe som åpenbart er i strid med antagelsene. Dermed har vi fått en selvmotsigelse og kan si at da må q være sann.

Eksempel La m være et heltall.

Utsagn: Hvis $\underbrace{m^2 \text{ er et oddetall}}_{p}$, så er $\underbrace{m \text{ et oddetall}}_{q}$.

Anta at p er sann og at q er usann, dvs. at m^2 er et oddetall og m et partall (ikke et oddetall). Da er $m = 2k$ der k er et annet heltall. Men $m^2 = (2k)^2 = 2(2k^2)$ og dermed et partall. Umulig siden vi antok at m^2 var et oddetall. Vi har fått en selvmotsigelse. Altså er q sann og dermed $p \Rightarrow q$ sann.