Avsnitt 8.1 i læreboken – Differensligninger

Andre navn på begrepet differensligning er rekursjonsligning eller rekurensrelasjon (eng: recurrence relation)

En differensligning har en tallfølge som løsning.

Eksempel

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad n \geq 2, \quad a_0 = 0, \; a_1 = 1$$

$a_0 = 0$ og $a_1 = 1$ kalles ligningens startbetingelser.
Når de er gitt kan vi regne ut så mange ledd vi vil.

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_1 &= 1 \end{aligned}\right\} \text{startbetingelser}$$

$$\begin{aligned}
a_2 &= a_1 + a_0 = 1 + 0 = 1 \\
a_3 &= a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2 \\
a_4 &= a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3 \\
a_5 &= a_4 + a_3 = 3 + 2 = 5 \\
a_6 &= a_5 + a_4 = 5 + 3 = 8
\end{aligned}$$

osv.

Tallrekken $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \cdots$ kalles Fibonacci-tallene

I vårt pensum skal vi se på to typer differensligninger. Begge er lineære.

Type 1 $\quad a_n = c\,a_{n-1} + d \quad$ der c og d er konstanter.

Type 2 $\quad a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} \quad$ der c_1 og c_2 er konstanter.

Type 1 kalles en 1. ordens ligning og type 2 en 2. ordens ligning.

Eksempel på ligning av type 1

Husk Hanois tårn: $H_n = 2H_{n-1} + 1$

Løsning av differensligningen

Ligninger av type 2

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} \quad , \quad c_2 \neq 0$$

Denne differensligningen har et karakteristisk polynom.
Polynomet ser slik ut:

$$\boxed{r^2 = c_1 r + c_2}$$

Eksempel 1 $\quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \rightarrow r^2 = r + 1$

Eksempel 2 $\quad a_n = 2a_{n-1} - 3a_{n-2} \rightarrow r^2 = 2r - 3$

Vi må finne løsningene (eller røttene) til polynomet, dvs. vi må løse en 2. gradsligning.

Husk formelen for 2. gradsligning:

$$\boxed{\begin{array}{l} ar^2 + br + c = 0 \\ r = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{array}}$$

Vi får de to løsningene $r_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ og $r_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Eksempel Gitt differensligningen $a_n = -a_{n-1} + 6a_{n-2}$.

Karakteristisk polynom: $r^2 = -r + 6$ eller $r^2 + r - 6 = 0$.

Vi får $r = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4(-6)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2}$

Løsningene: $r_1 = \frac{-1+5}{2} = 2$, $r_2 = \frac{-1-5}{2} = -3$

1) Anta at det karakteristiske polynomet $r^2 = c_1 r + c_2$ har to forskjellige reelle løsninger (røtter) r_1 og r_2.

Da vil differensligningen ha flg. generelle løsning:

$$\boxed{a_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n}$$

der α og β er vilkårlige konstanter.

Hvis vi kjenner startbetingelsene a_0 og a_1, kan vi finne α og β ved å løse flg. ligningssystem:

$$\boxed{\begin{aligned} \alpha + \beta &= a_0 \\ \alpha r_1 + \beta r_2 &= a_1 \end{aligned}}$$

Eksempel 1. Vi fortsetter med $a_n = -a_{n-1} + 6a_{n-2}$.

Anta at $a_0 = 1$ og $a_1 = 3$. Vi fant over at røttene r_1 og r_2 i det karakteristiske polynomet var $r_1 = 2$ og $r_2 = -3$.

Generell løsning: $a_n = \alpha 2^n + \beta(-3)^n$

Vi må løse: $\alpha + \beta = 1$, $2\alpha - 3\beta = 3$

$$\begin{aligned} 3\alpha + 3\beta &= 3 \\ 2\alpha - 3\beta &= 3 \\ \hline 5\alpha = 6, \quad \alpha &= \tfrac{6}{5} \\ \beta &= -\tfrac{1}{5} \end{aligned}$$

Løsning: $a_n = \frac{6}{5} 2^n - \frac{1}{5}(-3)^n$.

Det er lurt å sette prøve på løsningen:

$a_0 = 1$
$a_1 = 3$
$a_2 = -3+6 = 3$
$a_3 = -3+6\cdot 3 = 15$

$a_2 = \frac{6}{5}2^2 - \frac{1}{5}(-3)^2 = \frac{24}{5} - \frac{9}{5} = \frac{15}{5} = 3$ ok.

$a_3 = \frac{6}{5}2^3 - \frac{1}{5}(-3)^3$
$= \frac{48}{5} + \frac{27}{5} = \frac{75}{5} = 15$ ok.

Eksempel 2 Fibonaccitallene

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$.

Karakteristisk polynom: $r^2 = r+1$ eller $r^2 - r - 1 = 0$.
b c

Røttene: $r_1 = \frac{1+\sqrt{1-4(-1)}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

Generell løsning av differensligningen:

$$a_n = \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Vi finner α og β ved å løse:

$$\alpha + \beta = a_0 = 0$$
$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\alpha + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\beta = a_1 = 1$$

Dette gir $\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ og $\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$$\boxed{a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}$$

Vi vet at $a_2 = 1$. Gir formelen det? $a_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} - \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4}\right)$
$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+2\sqrt{5}+5-1+2\sqrt{5}-5}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{4\sqrt{5}}{4} = 1.$

En rekursiv metode som finner a_n der a_n er et ledd i følgen av Fibonacci-tall.

```
public static int a(int n)
{
  if (n == 0) return 0;
  else if (n == 1) return 1;
  else return a(n-1) + a(n-2);
}
```

En iterativ metode som gjør det samme:

```
public static int a(int n)
{
  int a = 0, b = 1, c = 1;

  for (int i = 1; i <= n; i++)
  {
    a = b; b = c; c = a + b;
  }
  return a;
}
```