

Ausmitt 6.3 i læreboken Permutasjoner og utvalg

En permutasjon av en samling objekter er en eller annen rekkefølge de kan settes opp i.

Eksempel 1 Gitt bokstavene a, b, c og d. Da er flg. oppstillinger en permutasjon:

a, b, c, d c, b, a, d d, a, b, c b, a, d, c

Eksempel 2 Gitt tallene fra 1 til 6. Flg. oppstillinger er permutasjoner:

1, 2, 3, 4, 5, 6 3, 6, 4, 1, 2, 5 6, 5, 4, 3, 2, 1

Antallet forskjellige permutasjoner

Gitt n forskjellige objekter. Det er n muligheter for å velge det som skal stå først, n-1 muligheter for å velge det som skal stå nest først, osv. Tilsammen blir dette

$$n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1 = n!$$

forskjellige permutasjoner. Obs: $n!$ leses som n fakultet

Eksempel 3 De fire bokstavene a, b, c og d kan permuteres på $4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 4! = 24$ måter. De seks tallene fra 1 til 6 kan permuteres på $6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 6! = 720$ måter.

Ordnete r -utvalg (eller r -permutasjoner)

Gitt n forskjellige objekter. Vi skal velge r objekter i rekkefølge fra de n objektene. Et slikt utvalg kalles et ordnet r -utvalg (eller en r -permutasjon) fordi rekkefølgen objektene velges i er av betydning.

Spørsmål: Hvor mange forskjellige ordnete r -utvalg er det?

Svar: Det er n muligheter for å velge det som skal være først i utvalget, $n-1$ for det som skal være nest først, osv. Det er $n-r+1$ muligheter for å velge det siste av de r objektene som skal velges. Dermed

$$n(n-1) \cdots (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Eksempel 1 Gitt tallene fra 1 til 6. Hvor mange ordnete 3-utvalg er det?

$$\text{Svar: } 6 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3 \cdot 2 \cdot 1}}{\cancel{3 \cdot 2 \cdot 1}}$$

Eksempel 2 Gitt bokstavene fra A til Å.

Hvor mange ordnete 5-utvalg finnes det?

Svar: Det er 29 bokstaver. Dermed får vi

$$\frac{29!}{(29-5)!} = \frac{29!}{24!} = \underbrace{29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25}_{5 \text{ tall}} = 14250600 \text{ 5-utvalg.}$$

Eksempel 3 En forening har 50 medlemmer. Det skal velges et styre på fire personer (leder, nestleder, kasserer, sekretær). Hvor mange forskjellige styresammensetninger er det mulig å få til?

$$\text{Svar: } 50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 = 5527200$$

Uordnede r -utvalg (eller r -kombinasjon)

Hvis vi velger et utvalg på r stykker fra en samling på m forskjellige objekter og rekkefølgen ikke er av betydning, kalles det et uordnet r -utvalg (eller en r -kombinasjon).

Ta som eksempel tallene fra 1 til 10. Vi skal velge tre tall. F.eks. 2, 5, 8 er et slikt valg. De samme tre tallene kan også velges ut i disse rekkefølgerne:
2, 8, 5, 5, 2, 8, 5, 8, 2, 8, 5, 2.

Disse $3! = 6$ ordnede utvalgene er samme utvalg når rekkefølgen ikke betyr noe. Dermed blir det

$$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!} = \frac{10!}{(10-3)! \cdot 3!} = 120 \text{ forskjellige uordnede } r\text{-utvalg.}$$

Dette gir oss f.eks. formel for antallet forskjellige uordnede r -utvalg:

$$\frac{n!}{(n-r)! \cdot r!} = \boxed{\frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}} \leftarrow \text{Viktig formel}$$

Eksempel Gitt en kortstokk med 52 kort.

Hvor mange korthender på 5 kort finnes det? Dette handler om ordnede 5-utvalg.

$$\begin{aligned} \text{Svar: } \frac{52!}{(52-5)! 5!} &= \frac{52!}{47! 5!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot \overset{10}{\cancel{50}} \cdot 49 \cdot \overset{2}{\cancel{48}}}{\cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2}} \\ &= 52 \cdot 51 \cdot 49 \cdot 20 = 2\,598\,960. \end{aligned}$$

Formelen $\frac{n!}{(n-r)! r!}$ er så viktig i matematikk at den har fått sitt eget symbol:

$$\boxed{\frac{n!}{(n-r)! r!} = \binom{n}{r}, \quad r \geq 0, n \geq r}$$

Symbollet $\binom{n}{r}$ leses som "n over r" og kalles en binomialkoeffisient. Læreboken bruker

$C(n, r)$ istedenfor $\binom{n}{r}$ og $P(n, r)$ istedenfor $\frac{n!}{(n-r)!}$.

OBS Det gir mening å ha $r=0$. Vi setter

$$\binom{n}{0} = 1 \text{ fordi } 0! = 1.$$

Eksempel Hvor mange bitsekvenser av lengde 8 har nøyaktig 3 1-ere (og dermed 5 0-er)?

Vi kan velge de 3 plassene der det skal være 1-ere på

$$\binom{8}{3} \text{ forskjellige måter. Vi har } \binom{8}{3} = \frac{8!}{5! 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} = 56$$

Det betyr at av de 256 mulige bitsekvenser er de 56 med nøyaktig 3 1-ere.

Vi kan tenke omvendt. Det må være like mange
 bitsekvenser av lengde 8 som har nøyaktig 5 0-er
 som det er som har nøyaktig 3 1-er.

Dvs. $\binom{8}{3} = \binom{8}{5} = 56$. Dette gir flg. generelle formel:

$$\boxed{\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}}$$

Absnitt 6.4 i boken Bimomialkoeffisienter

Husk 1. kvadratselving: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Mer generelt har vi $(a+b)^n$:

$$(a+b)^0 = 1 = \binom{0}{0}$$

$$(a+b)^1 = a+b = \binom{1}{0}a + \binom{1}{1}b$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = \binom{2}{0}a^2 + \binom{2}{1}ab + \binom{2}{2}b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = \binom{3}{0}a^3 + \binom{3}{1}a^2b + \binom{3}{2}ab^2 + \binom{3}{3}b^3$$

Her er det mønster! Hva blir $(a+b)^5$?

$$(a+b)^5 = \binom{5}{0}a^5 + \binom{5}{1}a^4b + \binom{5}{2}a^3b^2 + \binom{5}{3}a^2b^3 + \binom{5}{4}ab^4 + \binom{5}{5}b^5$$

↑
1

↑
5

↑
10

↑
10

↑
5

↑
1

Generell formel:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots$$

$$\dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r}a^{n-r}b^r$$

Pascals trekant

0							1
1				1		1	
2			1	2	1		
3		1	3	3	1		
4		1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 $\binom{6}{0}$ $\binom{6}{1}$ $\binom{6}{2}$ $\binom{6}{3}$ $\binom{6}{4}$ $\binom{6}{5}$ $\binom{6}{6}$

Tallene i hver rad er
like summen av to
tall i raden over.
Se f.eks. det med
rødt skrift.

OBS: legg merke
til at Pascals tre-
kant er symmetrisk
om midten.

Pascals trekant på en alternativ måte:

$m \backslash r \rightarrow$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

$k-1$ k
 rad 5
 kolonne 3

$\binom{m}{r}$ finner
vi i rad m og
kolonne r

F.eks. finner vi
 $\binom{5}{3}$ i rad 5 og
kolonne 3. Der
finner vi 10.

Pascals identitet

$$\binom{m+1}{k} = \binom{m}{k-1} + \binom{m}{k}$$

Spesielle summer:

$$2^m = \binom{m}{0} + \binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \dots + \binom{m}{m}$$

$$\sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} = 0$$