

Kapittel 10 fra læreboken (utdrag) Grafer

En graf er en samling punkter (noder) og kanter mellom punkter. (eng: vertex, node, edge)

En graf kalles rettet hvis kantene har retning (eng: digraph) og urettet hvis kantene ikke har retning.

Eksempel En relasjonsgraf er rettet.

Vi skal her kun se på urettede grafer!

Vi har tre typer urettede grafer:

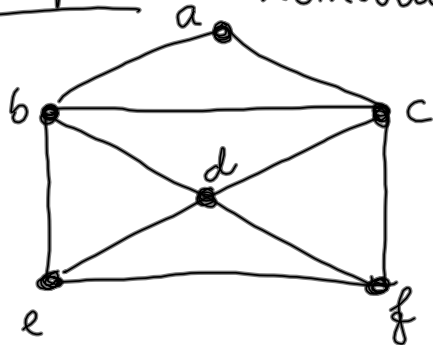
- En enkel graf er en graf uten sløyfer på punkter og ingen doble kanter mellom punkter.
- En multigraf er en graf uten sløyfer på punktene, men det kan være flere kanter mellom par av punkter.
- En pseudograf er en graf som er enten en enkel graf eller en multigraf.

Naboer

To punkter i en urettet graf kalles naboer hvis det er en kant mellom dem.

Graden til et punkt

Graden til et punkt i en urettet graf er antall forskjellige kanter som hører til punktet. En sløyfe telles som to kanter.

Eksempel Konvoluttgrafen

$$\begin{aligned}\text{grad}(a) &= 3 \\ \text{grad}(b) &= 3 \\ \text{grad}(c) &= 3 \\ \text{grad}(d) &= 3 \\ \text{grad}(e) &= 3 \\ \text{grad}(f) &= 3\end{aligned}$$

Et isolert punkt

Et punkt med grad 0 kalles et isolert punkt.

En pedant

Et punkt med grad 1 kalles en pedant.

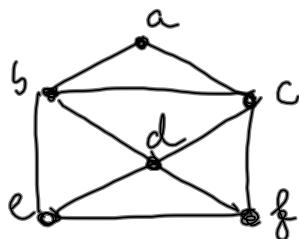
Grad-kant-setningen

Anta at en urettet graf er n punkter $a_1, a_2, \dots, a_n$ og k kanter. Da gjelder:

$$\sum_{i=1}^n \text{grad}(a_i) = 2k$$

En vei i en urettet graf

En vei er en sammenhengende rekkefølge av punkter og kanter mellom punkter. En vei har et startpunkt og et sluttpunkt. En vei oppgis ved å oppgi startpunktet, så punktene på veien og sluttpunktet (f.eks. med komma mellom).

Eksempel

En vei fra a til f kan være:

- 1) a, c, f
- 2) a, b, e, f
- 3) osv.

En vei er lukket hvis den starter og slutter i samme punkt. Den er åpen hvis den starter og slutter i forskjellige punkter. En lukket vei kalles også en sykel eller en ferets.

Enkel vei

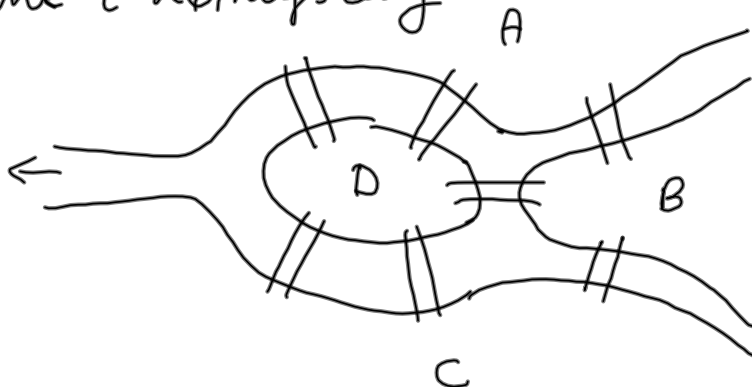
En vei er enkel hvis ingen kant inngår mer enn én gang.

Sammenhengende graf

En urettet graf er sammenhengende hvis det finnes en vei mellom hvert par av punkter.

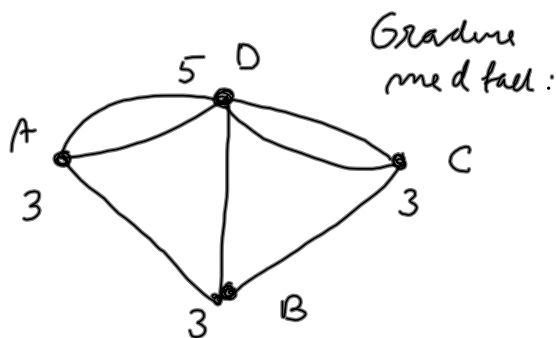
En Eulervei

Broene i Königsberg



Problem Er det mulig å starte i et område A, B, C eller D, gå over hver bro én og bare én gang og så ende opp der en startet?

Brosystemet kan oversettes til fig. graf der områdene A til D er punkter og broene kanter:



En lukket Eulervei er en lukket vei som passerer hver kant én og bare én gang.

En åpen Eulervei er en åpen vei som passerer hver kant én og bare én gang.

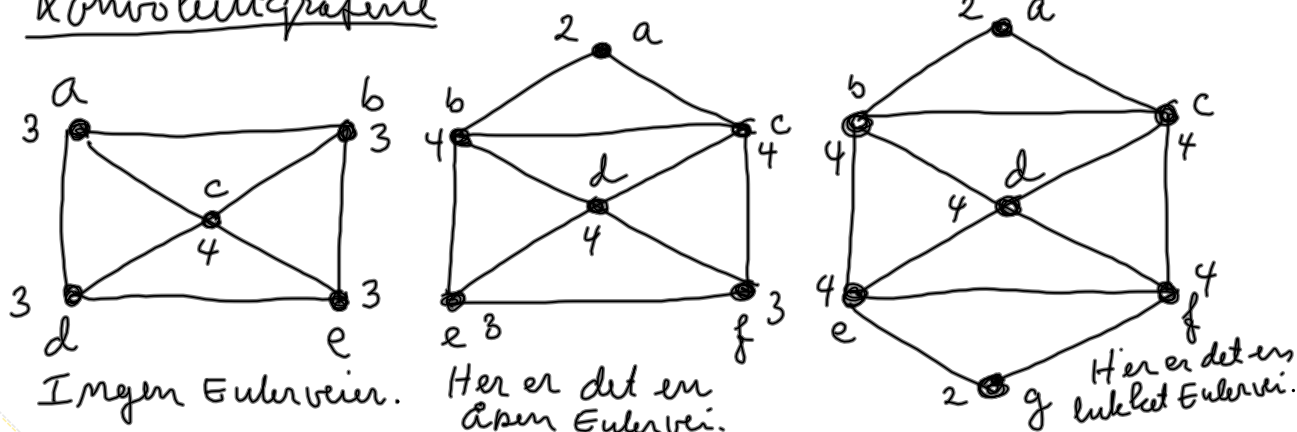
Problemet blir da å avgjøre om brografen har en lukket Eulervei.

Eulers setning

Gitt en rettet og sammenhengende multigraf med minst to punkter. Da har grafen en lukket Eulervei hvis og bare hvis alle punktene har partallsgrad. Grafen har en åpen Eulervei hvis og bare hvis nøyaktig to av punktene har oddetallsgrad (og dermed resten partallsgrad).

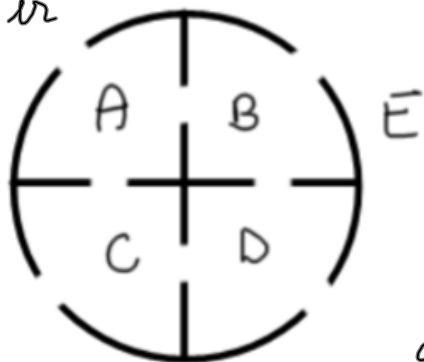
Konklusjon Det finnes hverken lukket eller åpen Eulervei i brografen fordi det er flere enn to punkter med oddetallsgrad.

Konvoluttgrafene



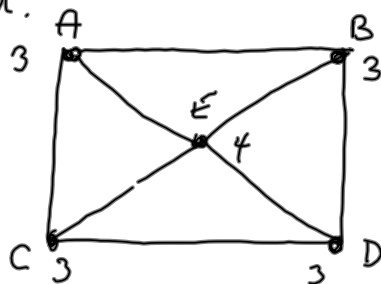
Et hus med fire rom A, B, C og D. E betegner utendørs.

Åpningene er
dører.



Problem Er det mulig å starte i et av rommene eller utendørs og gå gjennom hver dør nøyaktig én gang.

La rommene og utendørs være punkter i en graf og dørene kanter.



Her finnes ingen Eulervei siden det er mer enn to punkter som har oddetallsgrad.