Diskret matematikk – fredag 19. sept. 2014

Rekker (eng: series, summations)

En rekke er summen av leddene i en følge.

Gitt følgen: $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots, a_N$

Rekken blir $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_4 + \ldots + a_N = \underline{\sum_{n=0}^{N} a_n}$

Bokstaven n er en summasjonsindeks.
Vi kan også bruke $i, j, k, m, \ldots$

Aritmetiske rekker

Gitt den aritmetiske følgen $1, 2, 3, 4, \ldots, 100$

Rekken $1+2+3+\ldots+100 = \sum_{n=1}^{100} n = ?$

Regel for å finne summen

Med ord: Summen av en aritmetisk rekke er lik summen av første og siste ledd ganget med antall ledd og delt med 2.

$$\sum_{n=1}^{100} n = (1+100) \cdot 100/2 = 101 \cdot 50 = 5050$$

Regel som en formel

La a være første ledd, b siste ledd og n antall ledd. Da er summen gitt ved

$$\frac{(a+b)n}{2}$$

Antall ledd La d være den faste differensen mellom et vilkårlig ledd og det foregående leddet. Da er antall ledd n gitt ved:

$$n = \frac{b-a}{d} + 1$$

Eksempel 1 Hva blir summen $12+17+22+27+32+37+42$?

Første ledd $a = 12$ Differensen $d = 5$

Siste ledd $b = 42$ Antall ledd $n = \frac{42-12}{5} + 1 = 7$

Summen $= (12+42)7/2 = 189$

Eksempel 2 Hva blir summen $10+13+16+19+\cdots+91+94$?

$a = 10$, $b = 94$, $d = 3$, $n = \frac{94-10}{3} + 1 = 29$

Summen $= (10+94)29/2 = 1508$

Javakode for Eksempel 2 over. Først summen ved en for-løkke og så summen med formel.

```java
int a = 10;     // første ledd
int b = 94;     // siste ledd
int d = 3;      // den faste differensen mellom to ledd

int sum1 = 0;  // en for-løkke for å finne summen
for (int i = a; i <= b; i += d) sum1 += i;

int n = (b - a)/d + 1;     // antall ledd
int sum2 = (a + b)*n/2;    // summen med formel

System.out.println(sum1 + " " + sum2);
// Utskrift: 1508 1508
```

Geometriske rekker

Geometrisk følge: $a, ar, ar^2, ar^3, \dots, ar^N$

Geometrisk rekke: $a + ar + ar^2 + \dots + ar^N = \sum_{n=0}^{N} ar^n$

Formel for summen av en geometrisk rekke

$$\sum_{j=0}^{N} ar^j = \begin{cases} a\,\dfrac{r^{N+1}-1}{r-1}, & r \neq 1 \\ a(N+1), & r = 1 \end{cases}$$

Eksempel 1 Hva blir summen $1+2+4+8+\dots+128$?

Dette kan skrives som $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^7$

$$= \sum_{j=0}^{7} 2^j, \quad a = 1,\ r = 2,\ N = 7$$

Dermed $\displaystyle\sum_{j=0}^{7} 2^j = \frac{2^{7+1}-1}{2-1} = 2^8 - 1 = 256 - 1 = 255$

Eksempel 2 Hva blir summen $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32}$?

Dette kan skrives slik: $(-\frac{1}{2})^0 + (-\frac{1}{2})^1 + (-\frac{1}{2})^2 + (-\frac{1}{2})^3 + (-\frac{1}{2})^4 + (-\frac{1}{2})^5$

Dermed $\displaystyle\sum_{j=0}^{5} (-\tfrac{1}{2})^j = \frac{(-\frac{1}{2})^6 - 1}{-\frac{1}{2} - 1} = \frac{\frac{1}{64} - 1}{-\frac{3}{2}} = \frac{\frac{1}{64} - \frac{64}{64}}{-\frac{3}{2}}$

$$= \frac{-\frac{63}{64}}{-\frac{3}{2}} = \frac{63}{96} = \frac{21}{32}$$

Eksempel 3

Hva blir summen $16+32+64+\cdots+512$?

Vi har $a=16, r=2$. Dette kan skrives som

$$16\cdot 2^0 + 16\cdot 2^1 + \cdots + 16\cdot 2^5$$

$$\text{Summen} = \sum_{j=0}^{5} 16\cdot 2^j = 16\,\frac{2^6-1}{2-1} = 16\cdot 63 = 1008$$

Javakode

Dette er kode for Eksempel 2 over. Først finner vi summen ved hjelp av en for-løkke og så ved å bruke formelen.

```java
double a = 1;          // første ledd
double r = -1/2.0;     // kan ikke skrive -1/2
int N = 5;             // indeks til siste ledd
double ledd = a;       // første ledd

double sum1 = 0;       // en for-løkke for å finne summen
for (int j = 0; j <= N; j++)
{
   sum1 += ledd;       // legger til leddet
   ledd *= r;          // gangre med r for å få neste ledd
}

double sum2 =       // summen ved hjelp av formelen
   a*(Math.pow(r,N+1) - 1)/(r - 1);

System.out.println(sum1 + " " + sum2);
// Utskrift: 0.65625 0.65625   er det samme som 21/32
```

Denne koden kan også brukes til å finne summen i Eksempel 1 og 3 over. Prøv det!

Eksempel 1 : $a=1$, $r=2$, $N=7$

Eksempel 3 : $a=16$, $r=2$, $N=5$

Eksempel 4 Binære tall

Datatypen int (i Java og flere andre språk) har 32 binære siffer. Det første av de 32 sifrene kalles fortegnssiffer. Hvis det er 1, er tallet negativt. Hvis det er 0, er tallet ikke-negativt (dvs. 0 eller positivt).

Javakode:

```
int x = 0b01110110011010110000011001011111;  // et positivt tall
int y = 0b10101111010101010100111010101011;  // et negativt tall
System.out.println(x + " " + y);
// Utskrift: 1986725471 -1353363797
```

Det største mulige (positive) heltallet ser slik ut:

$$0\underbrace{1111111111111111111111111111111}_{31 \text{ 1-ere}}$$

Hvilket tall er dette?
Det er tallet $1+2+4+8+16+\cdots+2^{30}$. Dette er en geometrisk rekke med sum lik:

$$\sum_{j=0}^{30} 2^j = \frac{2^{30+1}-1}{2-1} = 2^{31}-1 = 2147483647$$

Hva tror du blir utskriften fra flg. Javaprogram?

```
public static void main(String... args)
{
  int k = 2147483647;
  int m = k + 1;

  System.out.println(m);
}
```

Avsnitt 2.5 fra læreboken En mengdes kardinalitet

Husk: En funksjon $f: A \to B$ kalles en bijeksjon hvis den er en-til-en og på.

Hvis en endelig mengde B har n forskjellige elementer, kan de alltid settes opp i en rekkefølge $b_0, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$. La så A være mengden $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$.

Da kan vi definere en funksjon $f: A \to B$ ved at $f(0) = b_0$, $f(1) = b_1$, $f(2) = b_2$, osv. til $f(n-1) = b_{n-1}$.

En slik funksjon f blir en bijeksjon

Tellbare mengder

Mengden $\mathbb{N}$ av de naturlige tallene $0, 1, 2, 3, \dots$ er uendelig. Vi sier at en uendelig mengde A er tellbar hvis det finnes en bjeksjon f fra $\mathbb{N}$ til A ($f: \mathbb{N} \to A$).

Kardinaliteten til en tellbar mengde betegnes med den hebraiske bokstaven alef og med indeks 0. Dvs.

$$\aleph_0$$

Setning De hele tallene $\mathbb{Z}$ er en tellbar mengde.

Vi kan sette opp tallene i flg. rekkefølge:

$$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \dots$$

Da kan vi sette opp flg. bijeksjon $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$:

$f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = -1$, $f(3) = 2$, $f(4) = -2$, osv.

Generelt: $f(2n) = -n$, $f(2n+1) = n+1$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

<u>Setning</u> De rasjonale tallene $\mathbb{Q}$ er en tellbar mengde

De rasjonale tallene består av alle brøker $\frac{p}{q}$, $q>0$ der p og q er hele tall. Vi setter opp flg. skjema:

$$\begin{array}{cccccc}
\frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{4}{1} & \frac{5}{1} & \cdots \\
\frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & \frac{5}{2} & \cdots \\
\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \cdots \\
\frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{3}{4} & \frac{4}{4} & \frac{5}{4} & \cdots \\
\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & \frac{5}{5} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

Vi kan sette dem opp i skrårekkefølge (eller diagonal rekkefølge). Vi starter i øverste venstre hjørne og for hver diagonal går vi nedover mot venstre.

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \cancel{\frac{2}{2}}, \frac{1}{3}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{5}{1}, \cancel{\frac{4}{2}}, \cancel{\frac{3}{3}}, \cancel{\frac{2}{4}}, \frac{1}{5}, \text{osv.}$$

Hvis et tall i rekkefølgen har forekommet tidligere, tar vi det vekk (markert med /).

Ethvert rasjonalt tall vil før eller senere dukke opp i denne rekkefølgen. Ved hjelp av denne rekkefølgen kan vi sette opp en bijeksjon $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$