Avsnitt 5.1 fra læreboken Induksjonsbevis

Problem Vi skal bevise at summen av de n første oddetallene er lik n^2, dvs. at

$$1+3+5+\cdots+2n-1 = n^2$$

Induksjonsbevis handler om å vise at påstanden (eller utsagnet) at $P(n)$ er sann for alle $n \geq 1$ stemmer.

Beviset består av to trinn:

1) (Basistrinnet) Vi må vise at $P(n)$ er sann for $n=1$.
2) (Induksjonstrinnet) Vi må vise at hvis $P(k)$ er sann for en vilkårlig $k \geq 1$, så er også $P(k+1)$ sann.

Hvis både 1) og 2) er oppfylt, sier induksjonsprinsippet at $P(n)$ er sann for alle $n \geq 1$.

Eksempel 1 La $P(n)$ være påstanden at

$$1+3+5+\cdots+2n-1 = \sum_{j=1}^{n}(2j-1) = n^2 \text{ for alle } n \geq 1.$$

1) Basistrinnet: $P(1)$ er at $1 = 1^2$ og det er sant.
2) Induksjonstrinnet: Anta at $P(k)$ er sann, dvs. at $1+3+\cdots 2k-1 = k^2$. Vi bruker så dette til å vise at da er også $P(k+1)$ sann. Vi har:

$$\underbrace{1+3+\cdots+2k-1}_{k^2}+2k+1 = \underbrace{k^2+2k+1}_{1.\ \text{kvadratsetning}} = (k+1)^2$$

Dermed har vi fått at $P(k+1)$ er sann.

Konklusjon: Induksjonsprinsippet gir at $P(n)$ er sann for alle $n \geq 1$.

Eksempel 2 La $P(n)$ være påstanden at 6 går opp i $n^3 - n$ for alle $n \geq 1$.

Kan dette stemme?

$n = 1$, $n^3 - n = 1^3 - 1 = 0$, 6 går opp i 0 ok
$n = 2$, $n^3 - n = 8 - 2 = 6$, 6 går opp i 6 ok
$n = 3$, $n^3 - n = 27 - 3 = 24$, 6 går opp i 24 ok
$n = 4$, $n^3 - n = 64 - 4 = 60$, 6 går opp i 60 ok

Induksjonsbevis

1) Basistrinnet: Vi har at $P(1)$ er sann. Se over.

2) Induksjonstrinnet: Anta at $P(k)$ er sann for en vilkårlig $k \geq 1$, dvs. at 6 går opp i $k^3 - k$.
Vi må så bruke dette til å vise at $P(k+1)$ er sann, dvs. at 6 går opp i $(k+1)^3 - (k+1)$.

Vi har $(k+1)^3 - (k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1$

$$= k^3 - k + 3(k^2 + k) = \underbrace{k^3 - k}_{\text{6 går opp i følge antagelsen}} + 3k(k+1).$$

Vi har at k og $k+1$ er nabotall og da må det ene av dem være partall siden partall og oddetall kommer annenhver gang i rekkefølgen av tall. Dermed går 2 opp i $k(k+1)$ og dermed 6 opp i $3k(k+1)$

Vi har funnet at 6 går opp i $k^3-k+3k(k+1)$
og siden det er lik $(k+1)^3-(k+1)$, går 6 også opp der.
Vi har dermed vist at $P(k+1)$ er sann.

Konklusjon Induksjonsprinsippet gir at
$P(n)$ er sann for alle $n \geq 1$.

Eksempel 3 La $P(n)$ være påstanden at 3
går opp i 5^n-2^n for alle $n \geq 1$.

Kan dette stemme?
$n=1$, $5^n-2^n = 5-2=3$, 3 går opp, ok
$n=2$, $5^2-2^2 = 25-4=21$, — " —, ok
$n=3$, $5^3-2^3 = 125-8=117$, — " —, ok

Induksjonsbevis
1) Basisfrennet: $P(1)$ er sann, se over.
2) Induksjonsfrennet: Anta at $P(k)$ er sann for en vilkårlig $k \geq 1$, dvs. at 3 går opp i 5^k-2^k.
Vi må så bruke det til å vise at $P(k+1)$ er sann, dvs. at 3 går opp i $5^{k+1}-2^{k+1}$.

Vi har $5^{k+1}-2^{k+1} = 5\cdot 5^k - 2\cdot 2^k = (3+2)5^k - 2\cdot 2^k$
$= 3\cdot 5^k + 2\cdot 5^k - 2\cdot 2^k = \underline{3}\cdot 5^k + 2(5^k-2^k)$.

Antagelsen gir at 3 går opp

Vi ser at 3 går opp i $3\cdot 5^k + 2(5^k-2^k) = 5^{k+1}-2^{k+1}$
Dermed er $P(k+1)$ sann.
Konklusjon: Induksjonsprinsippet gir at $P(n)$ er sann for alle $n \geq 1$.

Avsnitt 6.1 fra læreboken Opptelling

Produktregelen Anta at en oppgave kan deles opp i to deloppgaver som kan løses uavhengig av hverandre. Anta at første deloppgave kan løses på m forskjellige måter og at andre deloppgave kan løses på n forskjellige måter. Da kan hele oppgaven løses på $m \cdot n$ forskjellige måter.

Eksempel 1 Hver stol i en sal skal få et "nummer" som består av en bokstav og et tall fra 1 til 10. Hvor mange måter kan en stol "nummereres"? Svar: $29 \cdot 10$ siden det er 29 mulige bokstaver og 10 mulige tall.

En utvidelse av produktregelen

Anta at en oppgave kan deles opp i k deloppgaver og at de kan løses uavhengig av hverandre.
Anta at deloppgave 1 kan løses på n_1 måter, deloppgave 2 på n_2 måter, osv til deloppgave k som kan løses på n_k måter. Da kan hele oppgaven løses på

$n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ måter.

Eksempel 2 Anta at et bilnummer skal ha to bokstaver og fem siffer. Det første av de fem sifrene kan ikke være 0. Hvor mange mulige bilnummer er det?
Svar: $29 \cdot 29 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9 \cdot 10^4 \cdot 29^2$.

Eksempel 3 En bitsekvens er en rekkefølge av bitene 0 og 1. Lengden på sekvensen er lik antallet biter. Hvor mange forskjellige bitsekvenser med lengde 8 finnes det? Sekvensen 10010110 er et eksempel.

På hver av de 8 plassene i sekvensen er det to muligheter. Dermed blir det $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^8 = 256$ muligheter.

Generelt: Vi har 2^n forskjellige bitsekvenser med lengde n.

Eksempel 4 I en spørrekonkurranse er det 10 spørsmål og hvert spørsmål har 3 svaralternativer der ett av dem er riktig og de to andre gale.

Hvor mange måter kan vi svare på? Hvor mange måter kan vi svare på uten å få noen rette svar?

1) Antallet måter å svare: $3 \cdot 3 \cdots 3 = 3^{10}$

2) Antallet måter med gale svar: $2 \cdot 2 \cdots 2 = 2^{10}$

Sannsynligheten for ingen rette:

$$\frac{2^{10}}{3^{10}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{10} = 0.017 \text{ , dvs. } 1,7\%$$