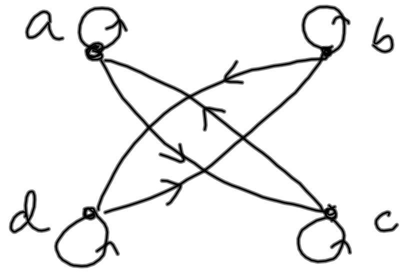
Avsnitt 9.5 i læreboken Ekvivalensrelasjoner

En relasjon R på en mengde A er en ekvivalensrelasjon hvis den er refleksiv, symmetrisk og transitiv.

Eksempel 1 La $A = \{a, b, c, d\}$ og

$$R = \{(a,a), (a,c), (b,b), (b,d), (c,a), (c,c), (d,b), (d,d)\}$$

Grafen G_R til R:



Matrisen M_R til R:

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dette er en ekvivalensrelasjon siden den er refleksiv, symmetrisk og transitiv.

Eksempel 2 La A være alle heltallene og la $R = \{(a,b) \mid a \equiv b \pmod 5\}$. Husk at $a \equiv b \pmod 5$ hvis 5 går opp i $a-b$ eller at $a \bmod 5 = b \bmod 5$.

R er refleksiv fordi $a \equiv a \pmod 5$.

R er symmetrisk fordi hvis $a \equiv b \pmod 5$, så er $b \equiv a \pmod 5$. R er transitiv fordi hvis $a \equiv b \pmod 5$ og $b \equiv c \pmod 5$, så er $a \equiv c \pmod 5$.

Dermed er dette en ekvivalensrelasjon.

Eksempel 3 La A være heltallene og la

$R = \{(a,b) \mid a+b \text{ er et partall}\}$.

R er refleksiv fordi $a+a = 2a$ er et partall.
R er symmetrisk fordi hvis $a+b$ er et partall, så er $b+a$ et partall.

La $(a,b) \in R$ og $(b,c) \in R$, dvs. $a+b$ er et partall og $b+c$ er et partall. Da blir $a+b+b+c = s$ et partall. Dermed blir $a+c = s - 2b$ et partall.
Det betyr at R er transitiv og dermed en ekvivalensrelasjon.

Ekvivalensklassen

La R være en ekvivalensrelasjon på en mengde A.
La $a \in A$. Ekvivalensklassen til a betegnes med $[a]_R$ og er flg. delmengde av A:

$$[a]_R = \{b \in A \mid (a,b) \in R\}$$

Obs $[a]_R$ inneholder alltid a siden R er refleksiv.

Eksempel La A være heltallene og $R = \{(a,b) \mid a \equiv b \pmod 5\}$

$[0]_R = \{\ldots, -10, -5, 0, 5, 10, 15, \ldots\}$
$[1]_R = \{\ldots, -9, -4, 1, 6, 11, 16, \ldots\}$
$\vdots$
$[4]_R = \{\ldots, -6, -1, 4, 9, 14, \ldots\}$

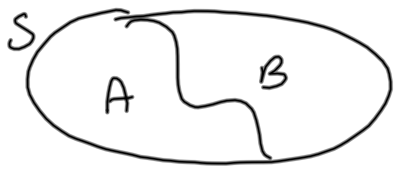
Vi får at $[5]_R = [0]_R$, $[6]_R = [1]_R$, osv.

Obs:
$[0]_R \cup [1]_R \cup \cdots$
$\cdots \cup [4]_R = A$

$[0]_R \cap [1]_R = \emptyset$
osv.

Partisjoner (oppdelinger)

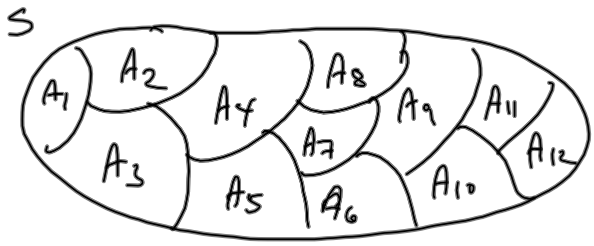
Gitt en universalmengde S. La A og B være delmengder av S slik at $A \cap B = \emptyset$ og $A \cup B = S$. Vi sier da at mengdene A og B utgjør en partisjon (oppdeling) av S.



$A \cup B = S$

$A \cap B = \emptyset$

Generelt La $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ være delmengder av S slik at $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$ og at $A_i \cap A_j = \emptyset$ for alle $i \neq j$. Vi sier da at mengdene $A_1, \dots, A_n$ utgjør en partisjon av S.



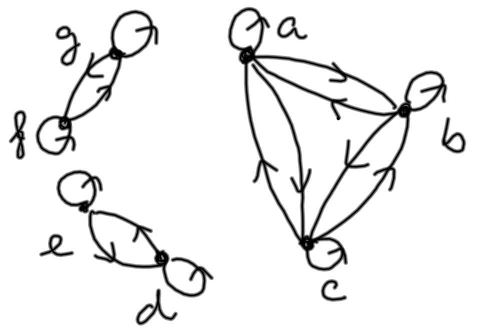
Setning La R være en ekvivalensrelasjon på en mengde A. Da vil ekvivalensklassene til R utgjøre en partisjon av A.

Omvendt Gitt en partisjon av en mengde A. Da definerer den en ekvivalensrelasjon R på A ved at alle elementer i hver delmengde i partisjonen relateres til hverandre og seg selv.

<u>Eksempel</u> La $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$. La $A_1 = \{a,b,c\}$, $A_2 = \{d,e\}$ og $A_3 = \{f,g\}$. Vi ser at $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = A$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $A_1 \cap A_3 = \emptyset$ og $A_2 \cap A_3 = \emptyset$.
Dette definerer flg. ekvivalensrelasjon:

$$R = \{(a,a), (b,b), (c,c), (a,b), (b,a), (a,c), (c,a), (b,c), (c,b), (d,d), (e,e), (d,e), (e,d), (f,f), (g,g), (f,g), (g,f)\}.$$

Grafen G_R til R:



Matrisen M_R til R:

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Avsnitt 9.6 fra læreboken Delvise ordninger

På norsk brukes også <u>partielle ordninger</u>.
(Eng: partial order).

En relasjon R på en mengde A kalles en <u>delvis ordning</u> hvis den er <u>refleksiv</u>, <u>antisymmetrisk</u> og <u>transitiv</u>.

Mengden A sies da å være delvis ordnet mhp. R.
På engelsk kalles A da en <u>poset</u> (partially ordered set)

Eksempel 1 La A være heltallene og $R = \{(a,b) \mid a \le b\}$ der $a \le b$ betyr a mindre enn eller lik b.

R er refleksiv siden $a \le a$. R er antisymmetrisk fordi hvis $a \le b$ og $a \ne b$, er $b \not\le a$. Dvs. hvis $(a,b) \in R$ og $a \ne b$, så er $(b,a) \notin R$.

R er transitiv fordi hvis $a \le b$ og $b \le c$, så er $a \le c$. Det betyr at R er en delvis ordning.

Eksempel 2 La $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ og $R = \{(a,b) \mid a \text{ går opp i } b\}$. Da får R flg. par:

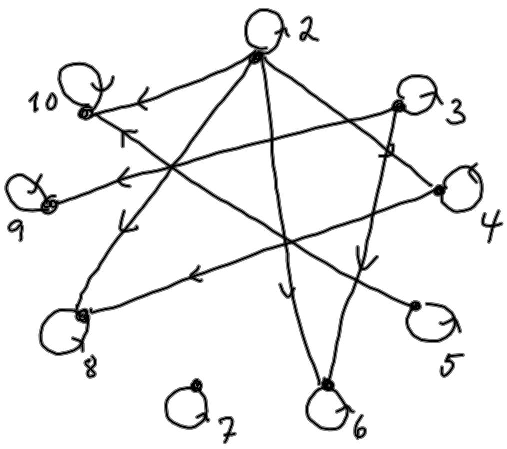
$$R = \{(2,2), (2,4), (2,6), (2,8), (2,10), (3,3), (3,6), (3,9), (4,4), (4,8), (5,5), (5,10), (6,6), (7,7), (8,8), (9,9), (10,10)\}.$$

R er refleksiv fordi $(a,a) \in R$ for alle $a \in A$.

R er antisymmetrisk fordi hvis a går opp i b og $a \ne b$, så kan ikke b gå opp i a.

R er transitiv fordi hvis a går opp i b og b går opp i c, så må a gå opp i c.

Grafen G_R til R:



Matrisen M_R til R

$$\begin{bmatrix}
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}$$

Eksempel 3 La U være en universalmengde og la A og B være to vilkårlige delmengder av U. La

$$R = \{(A, B) \mid A \subseteq B\}.$$

R er refleksiv fordi $A \subseteq A$. R er antisymmetrisk fordi hvis $A \subseteq B$ og $A \neq B$, så er $B \nsubseteq A$.

R er transitiv fordi hvis $A \subseteq B$ og $B \subseteq C$, så er $A \subseteq C$.

Dermed er R en delvis ordning av alle delmengdene til U.