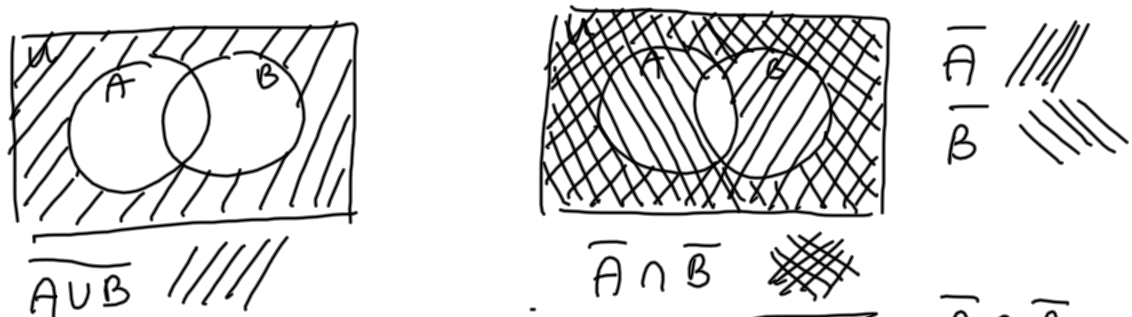
Diskret matematikk – fredag 12. september 2014

Mer om mengdeidentiteter

Hvordan viser man at f.eks. DeMorgans lov
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ er sann?

1) Venn-diagram



Tegningene viser at $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

2) Medlemsskapstabell (eng: membership table)

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$A \cup B$	$\overline{A \cup B}$	$\overline{A} \cap \overline{B}$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1	1

like

Konklusjon:
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Mange mengder

Har vi mange mengder er det vanlig å indeksere.
Anta at vi har $\underline{n}$ mengder. Da skriver vi

$$A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots, A_n$$

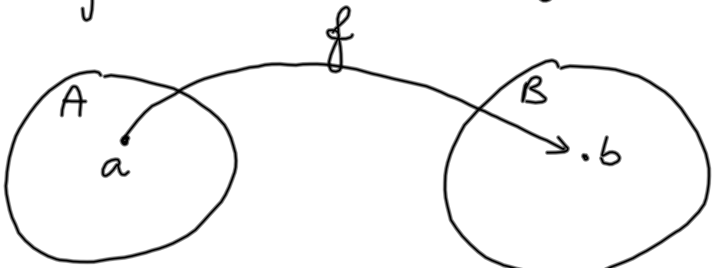
Vi setter opp snitt og union slik:

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

Avsnitt 2.3 fra læreboken – Funksjoner

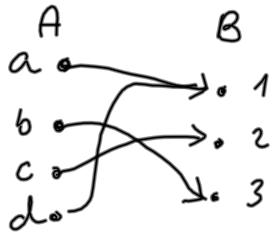
La A og B være to mengder. En funksjon f fra A til B betegnes med $f : A \to B$ og er en tilordning (regel) som til hvert element $a \in A$ tilordner ett og bare ett element $b \in B$. Elementet b kalles funksjonsverdien til a og vi skriver $f(a) = b$.



Eksempel La $A = \{a, b, c, d\}$ og $B = \{1, 2, 3\}$.

La f være gitt ved: $f(a) = 1$, $f(b) = 3$, $f(c) = 2$, $f(d) = 1$.

Dette kan illustreres slik:



OBS For at det skal være en funksjon må det gå en pil fra hvert eneste element i A til et element i B. Men det kan ikke gå to eller flere piler fra noe element i A.

I B kan det være elementer som ikke blir truffet av noen pil eller blir truffet av mer enn én pil.

Mengden A kalles funksjonens definisjonsmengde (eng: domain) og mengden B kalles funksjonens verdiområde (eng: codomain).

Mengden $f(A)$ er definert ved

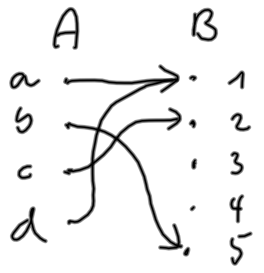
$$f(A) = \{ f(a) \mid a \in A \}.$$

Mengden $f(A)$ er mengden av funksjonsverdier $f(a)$ og kalles funksjonens <u>verdimengde</u> (eng: range).

Uformelt kan vi si at verdimengden $f(A)$ til f består av de elementene i B som blir truffet av minst én pil.

<u>Eksempel</u> $A = \{a, b, c, d\}$ og $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

La f være definert ved: $f(a) = 1$, $f(b) = 5$, $f(c) = 2$, $f(d) = 1$.



Definisjonsmengden til f : A
Verdiområdet til f : B
Verdimengden til f : $\{1, 2, 5\}$

Én-til-én (entydig) (eng: one-to-one)

En funksjon $f: A \to B$ er <u>en-til-en</u> hvis ingen elementer i B blir truffet av mer enn én pil.

Mer formelt: $f: A \to B$ er en-til-en hvis a og b er to forskjellige elementer i A, så er $f(a)$ og $f(b)$ to forskjellige elementer i B.

Eller omvendt: Hvis $f(a) = f(b)$, så er $a = b$.

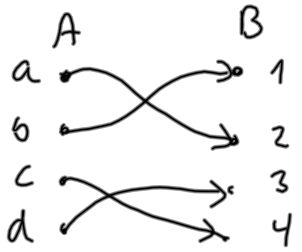
På (eng: onto)

En funksjon $f: A \to B$ er <u>på</u> hvis verdimengden $f(A)$ er lik B. Det betyr at for alle $b \in B$ finnes det en $a \in A$ slik at $f(a) = b$. Dvs.

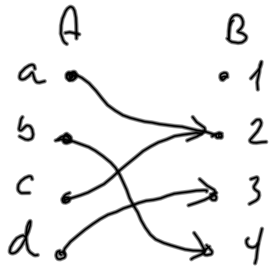
$$\forall (b \in B) \exists (a \in A) (f(a) = b).$$

Uformelt kan vi si at f er <u>på</u> hvis <u>alle</u> elementene i B blir truffet av en pil.

Eksempler



Denne er både en-til-en og på

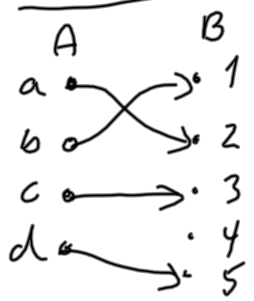


Denne er verken en-til-en eller på

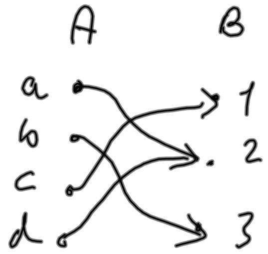
En observasjon

La $f: A \to B$. Hvis B har flere elementer enn A, kan f ikke være på. Hvis A har flere elementer enn B, kan ikke f være en-til-en.

Eksempel



Denne er en-til-en, men ikke på



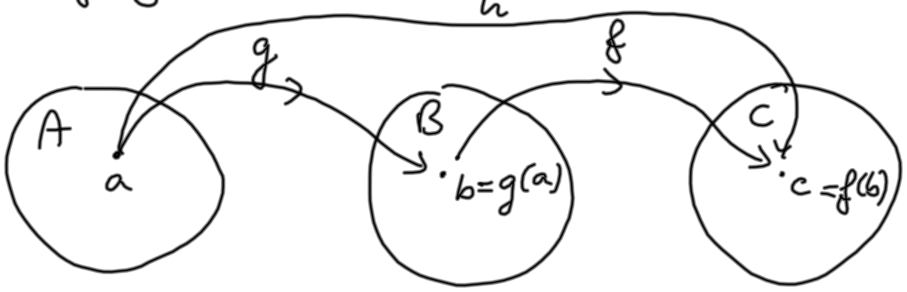
Denne er på, men ikke en-til-en

Andre navn

1) Et annet navn på en-til-en er <u>injektiv</u>.
2) Et annet navn på <u>på</u> er <u>surjektiv</u>.
3) En funksjon som er både en-til-en og på (både injektiv og surjektiv) kalles <u>bijektiv</u>.

Sammensetningen av to funksjoner

La $g: A \to B$ og $f: B \to C$. Da kan vi lage sammensetningen h av f og g. Den betegnes med $f \circ g$ (leses som f ring g).



Sammensetningen $h = f \circ g$ er en funksjon fra A til C ($h: A \to C$) og er definert ved

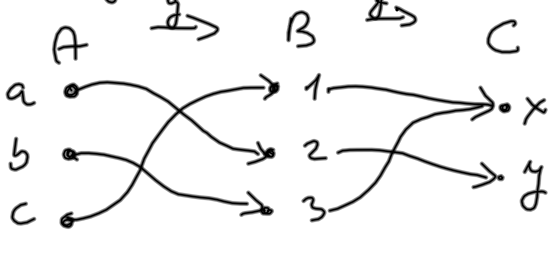
$$h(a) = f(g(a))$$

OBS $f \circ g \neq g \circ f$

Eksempel La $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{x, y\}$.

La $g: A \to B$ være definert ved: $g(a) = 2$, $g(b) = 3$, $g(c) = 1$.

La $f: B \to C$ være definert ved: $f(1) = x$, $f(2) = y$, $f(3) = x$.



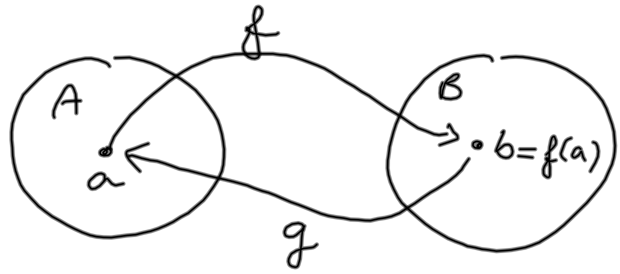
La $h = f \circ g$. Vi får:

$h(a) = y$, $h(b) = x$, $h(c) = x$

Inverse funksjoner

En funksjon $f: A \to B$ som er både en-til-en og på, har en invers funksjon. Ellers ikke.

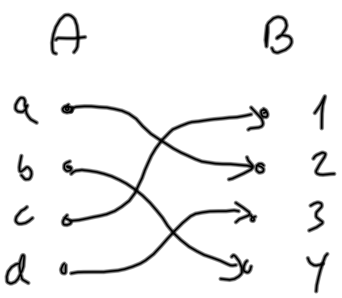
Den inverse funksjonen til f er den funksjonen $g : B \to A$ som er slik at $g(f(a)) = a$.



Den inverse til f kan betegnes med f^{-1}.

<u>Eksempel</u> $A = \{a, b, c, d\}$ og $B = \{1, 2, 3, 4\}$.

La f være definert ved $f(a) = 2$, $f(b) = 4$, $f(c) = 1$, $f(d) = 3$.



Den inverse funksjonen g til f er gitt ved:

$g(1) = c$, $g(2) = a$, $g(3) = d$, $g(4) = b$.

Vi ser at f.eks. $g(f(a)) = g(2) = a$.

Vi ser også at f er den inverse til g.
F.eks. har vi $f(g(2)) = f(a) = 2$.