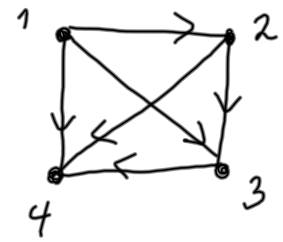
Litt mer om grafen og matrisen til en relasjon

Eksempel

La $A = \{1, 2, 3, 4\}$ og la R være relasjonen på A definert ved $R = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)\}$.

Grafen G_R til R



Matrisen M_R til R

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Egenskaper til relasjoner på en mengde A

Refleksivitet

Relasjonen R er refleksiv hvis $(a,a) \in R$ for alle $a \in A$.

Grafen til R: R er refleksiv hvis hvert punkt har en sløyfe.

Matrisen til R: R er refleksiv hvis hoveddiagonalen har kun 1-ere.

Symmetri

En relasjon R på en mengde A er symmetrisk hvis for alle $a, b \in R$ slik at $(a,b) \in R$, så er også $(b,a) \in R$.

Grafen til R: R er symmetrisk hvis det går en pil/kant fra a til b, så går det også en pil/kant motsatt vei, dvs. fra b til a.

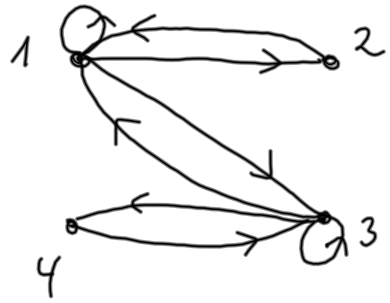
Matrisen til R: R er symmetrisk hvis M_R er en symmetrisk matrise.

Husk: En matrise M er symmetrisk hvis $M = M^T$.

Eksempel La $A = \{1,2,3,4\}$ og

$R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (3,1), (3,3), (3,4), (4,3)\}$

Grafen G_R til R:



Matrisen til R:

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

R er ikke refleksiv fordi f.eks. $(2,2) \notin R$.

R er symmetrisk fordi M_R er en symmetrisk matrise.

Antisymmetri

En relasjon R på en mengde A er antisymmetrisk hvis for alle $a, b \in A$ slik at $(a,b) \in R$ og $a \neq b$, så er $(b,a) \notin R$.

Grafen til R: Hvis det går en pil/kant én vei mellom to forskjellige punkter, kan det ikke gå kant/pil motsatt vei.

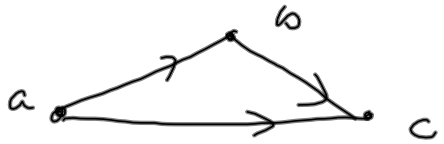
Matrisen til R: Hvis det står 1 et sted utenfor hoveddiagonalen, må det stå 0 på motsatt side av hoveddiagonalen.

OBS: R i eksemplet på forrige side er antisymmetrisk

Transitivitet

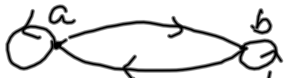
En relasjon R på en mengde A er transitiv hvis $(a,b) \in R$ og $(b,c) \in R$, så er også $(a,c) \in R$.

Dette kalles også "trekantregelen".



Dette betyr at hvis det går en pil/kant fra a til b og en pil/kant fra b til c, så må det gå en pil/kant fra a til c.

<u>OBS</u> De tre punktene a, b og c behøver ikke være like. Anta at vi har at $(a,b) \in R$ og $(b,a) \in R$. La $c = a$. Hvis R skal være transitiv, må $(a,b) \in R$ og $(b,c) \in R$ medføre at $(a,c) \in R$ og dermed $(a,a) \in R$ siden $a = c$. Hvis istedem $b = c$, får vi på samme måten at $(b,b) \in R$.



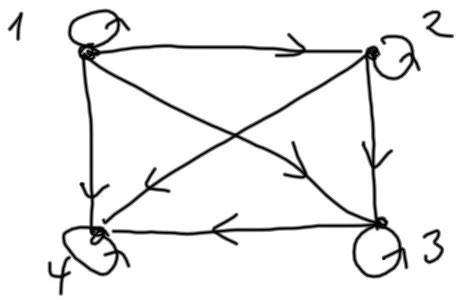
Dette betyr at hvis det går piler/kanter begge veier mellom to forskjellige punkter a og b, så må begge to ha "sløyfer" for at relasjonen skal være transitiv.

<u>Eksempel</u>

La $A = \{1,2,3,4\}$ og $R = \{(a,b) \mid a \le b\}$. Det gir flg. R:

$$R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)\}$$

Grafen G_R til R:



Matrisen til R:

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1) R er refleksiv 2) R er ikke symmetrisk 3) R er antisymmetrisk

4) Hvis a, b og c er tre tall slik at $a \le b$ og $b \le c$, så er $a \le c$. Dermed er R transitiv.