Diskret matematikk – fredag 5. september 2014

Avsnitt 2.1 fra læreboken – Mengder

En mengde (eng: set)

En mengde er en uordnet samling av objekter.

Vi bruker vanligvis store bokstaver til å betegne mengder. Det kan f.eks. være A, B, C, . . . , M, . . , S, . .

Objektene som inngår i en mengde kalles *elementer* i mengden (eller medlemmer) og de betegnes med små bokstaver.

La A være en mengde og a et element i mengden A. Dette betegnes ved hjelp flg. symbol: $a \in A$. Hvis a ikke er element i A, skriver vi $a \notin A$.

Vi *definerer* en mengde ved å fortelle hva den inneholder.

Eksempel

La A være mengden av de hele tallene fra 1 til 5. Dette skriver vi på flg. kortform:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

Her sier vi at A er på listeform.

Hvis mengden har mange elementer, pleier vi kun å ramse opp noen i starten og noen i slutten. Vi tar med så mange at vi ser mønsteret.

Eksempel: La B være mengden av heltallene fra 1 til 100. Det kan vi skrive slik:

$$B = \{1, 2, 3, \ldots, 99, 100\}$$

Prikkene representerer det som mangler.

La C være mengden av partallene fra 2 til 100.

$$C = \{2, 4, 6, \ldots, 98, 100\}$$

En mengde kan ha uendelig mange elementer. La D være mengden av alle positive heltall. Den kan skrives slik:

$$D = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

En mengde kan defineres ved hjelp av en *utsagnsfunksjon* med en gitt definisjonsmengde (eng: domain). La A være definisjonsmengden for utsagnsfunksjonen P(x). La så mengden B være definert ved

$$B = \{a \in A \mid P(a)\}$$

Dette leses slik: B er mengden av de elementene i A som gjør $P(a)$ sann.

Eksempel La $P(x)$ være gitt ved: $x > 10$ der x er et heltall. Det betyr at definisjonsmengden A for $P(x)$ er alle heltallene. Da blir B slik:

$$\begin{aligned} B &= \{x \in A \mid P(x)\} \\ &= \{x \in A \mid x > 10\} \\ &= \{11, 12, 13, \ldots\} \end{aligned}$$

Symbolet $\{\ldots \mid \ldots\}$ kalles en mengdebygger (eng: set builder).

Noen tallmengder har fått egne symboler:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ er de naturlige tallene.

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ er de hele tallene.

$\mathbb{Q}$ er de rasjonale tallene.

$\mathbb{R}$ er de reelle tallene.

$\mathbb{C}$ er de komplekse tall.

Programmering En datatype kan ses på som en mengde. For eksempel representerer datatypen int heltallene fra -2^{31} til $2^{31}-1$.

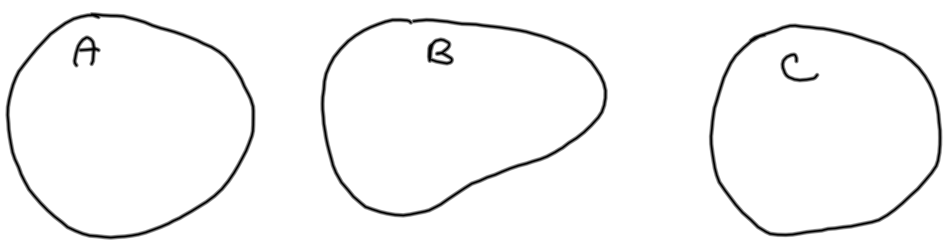
Likhet mellom mengder

To mengder A og B er like hvis de inneholder de samme elementene. Da skriver vi A = B. Vi skriver A ≠ B hvis de er ulike.

Eksempel 1 La $A = \{1, 7, 3, 5\}$ og $B = \{7, 5, 3, 1\}$. Er $A = B$? Ja, fordi A og B inneholder de samme elementene. Det er ingen regel om at elementene i en mengde må ramses opp i en bestemt rekkefølge.

Eksempel 2 La $A = \{1, 1, 2, 2, 2, 3\}$ og $B = \{1, 2, 3\}$. Er $A = B$? Ja, fordi både A og B inneholder tallene 1, 2, 3. Obs: En mengde blir ikke større om et element tas med flere ganger.

Venn-diagram En mengde kan tegnes som en "rund" figur. Det innenfor er mengden.



En delmengde (eng: subset)

En mengde A er en delmengde av en mengde B hvis alle elementene i A også er elementer i B. Dette betegnes med $A \subseteq B$. Dette defineres formelt ved:

$$\forall x(x \in A \rightarrow x \in B) \ .$$

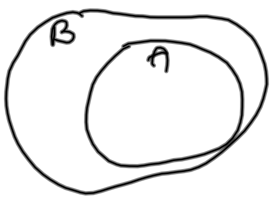
Symbolet $\subseteq$ kalles *inklusjonssymbolet*. Hvis A ikke er en delmengde av B, skriver vi $A \nsubseteq B$.

Obs: En mengde er alltid en delmengde av seg selv. Dvs. $A \subseteq A$ for alle mengder A.

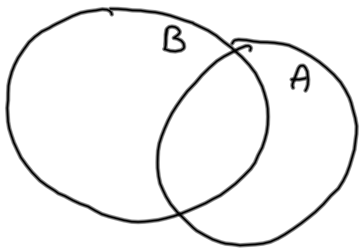
Det er flere måter å si at A er en delmengde av B. F.eks.

- A er inneholdt i B
- A er inkludert i B
- B omfatter A

Venn-diagram



$A \subseteq B$



$A \nsubseteq B$

Eksempel 1 La $A = \{2, 3, 5\}$ og $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
Her er $A \subseteq B$.

Eksempel 2 La $A = \{2, 3, 5, 6\}$ og $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
Her er $A \nsubseteq B$ fordi $6 \in A$, men $6 \notin B$.

OBS Vi har at $A = B$ hvis og bare hvis $A \subseteq B$ og $B \subseteq A$.

Hvis $A \subseteq B$ og $A \neq B$, så sier vi at A er en ekte delmengde av B.

Den tomme mengden

Den mengden som ikke har noen elementer kalles den *tomme mengden*. Den betegnes med ∅ eller {}. Den tomme mengden er en delmengde av alle andre mengder. Dvs. $\emptyset \subseteq A$ for alle mengder A.

Eksempel En mengde kan være element i en annen mengde. La f.eks. A være gitt ved:

$$A = \{1, 2, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}\}$$

Elementene i A er tall og mengder. F.eks. er både $1 \in A$ og $\{1\} \in A$. Videre $\emptyset \in A$ og $\emptyset \subseteq A$.

Hva er forskjellen mellom 1, $\{1\}$, $\{\{1\}\}$?

Først har vi tallet 1, så mengden av tallet 1 og så mengden av mengden av tallet 1.

$$1 \in \{1\}, \quad 1 \notin \{\{1\}\}, \quad \{1\} \in \{\{1\}\}.$$

En mengdes kardinalitet (eng: cardinality)

En mengdes kardinalitet (eller størrelse) er antallet forskjellige elementer i mengden. Kardinaliteten til A betegnes med |A|.

Eksempler

$A = \{a, b, c, d\}$, $|A| = 4$

$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $|B| = 6$

$C = \{1, 2, 2, 3, 3, 3\}$, $|C| = 3$

$D = \{2, 4, 6, \dots, 98, 100\}$, $|D| = 50$

$E = \emptyset$, $|E| = 0$

$F = \{a, \{a\}, \{a, b\}\}$, $|F| = 3$

G = bokstavene i alfabetet, $|G| = 29$

Potensmengden (eng: powerset)

La A være en mengde. *Potensmengden* til A betegnes med P(A) og er den mengden som har alle delmengdene til A som elementer.

Eksempel 1 $A = \{a, b\}$, $P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

Vi har $|P(A)| = 2^{|A|} = 2^2 = 4$

Eksempel 2 $A = \{1, 2, 3\}$.

$$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

$$|P(A)| = 2^{|A|} = 2^3 = 8.$$

$$\boxed{\text{Formel:} \quad |P(A)| = 2^{|A|}}$$

Kartesisk produkt (eng: Cartesian product)

La A og B være mengder. Det kartesiske produktet av A og B betegnes med A × B (leses som A kryss B) og er definert ved

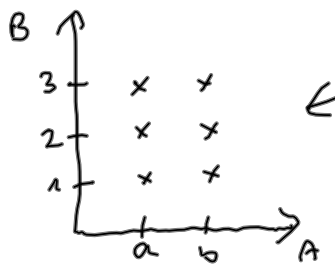
$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ og } b \in B\}$$

Vi har $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

Eksempel La $A = \{a, b\}$ og $B = \{1, 2, 3\}$.

$$A \times B = \{(a,1), (a,2), (a,3), (b,1), (b,2), (b,3)\}$$

Vi kan tegne $A \times B$ i et koordinatsystem



De seks kryssene utgjør mengden $A \times B$.