Diskret matematikk – fredag 3. okt. 2014

Eksempel på praktisk bruk av moduloregning:

Tverrsum

Tverrsummen til et heltall er summen av tallets siffer.

Eksempel $a = 7358$. Tverrsummen til a er lik
$7+3+5+8 = 23$.

Setning La $\text{sum}(a)$ stå for tverrsummen til a.
Da er $a \equiv \text{sum}(a) \pmod 9$, dvs. a er kongruent med tverrsummen til a modulo 9.

Bevis Tallet a har et bestemt antall siffer. Her tenker vi oss at a har fire siffer. Beviset kan gjøres på en tilsvarende måte hvis a har et annet antall siffer.
La de fire sifrene til a være x, y, z og u, dvs. at $a = xyzu$. Hvis f.eks. $a = 3758$, vil $x=3$, $y=7$, $z=5$ og $u=8$. Tverrsummen $\text{sum}(a)$ blir da $x+y+z+u$.
Vi har også at $a = 1000x + 100y + 10z + u$. Dermed

$$\begin{aligned} a - \text{sum}(a) &= 1000x + 100y + 10z + u - x - y - z - u \\ &= 999x + 99y + 9z = 9(111x + 11y + z). \end{aligned}$$

Dermed går 9 opp i $a - \text{sum}(a)$. Med andre ord er a kongruent med tverrsummen til a modulo 9.

Gjentatt tverrsum (eng: digital root)

Den gjentatte tverrsummen til et heltall a er det tallet vi får ved å ta tverrsummen til tverrsummen osv. til vi ender opp med et ensifret tall.

<u>Eksempel</u> La $a = 3758$. Tverrsummen til a er lik $3+7+5+8 = 23$. Tverrsummen til 23 er lik $2+3=5$.
Dette betyr spesielt at $3758 \equiv 5 \pmod 9$. Stemmer det?
Ja, fordi $3758 - 5 = 3753 = 417 \cdot 9$. Med andre ord går 9 opp i $3758-5$.

<u>Testing av svar i regnestykker</u>

La a og b være hele tall, $g(a)$ den gjentatte tverrsummen til a og $g(b)$ den gjentatte tverrsummen til b.

Da har vi $a \equiv g(a) \pmod 9$ og $b \equiv g(b) \pmod 9$.

Da gjelder også $ab \equiv g(a) \cdot g(b) \pmod 9$.

La f.eks. $a = 3758$ og $b = 347$. Vi finner $g(a)$ og $g(b)$:

$3758 \to 3+7+5+8 = 23 \to 2+3 = 5$ og
$347 \to 3+4+7 = 14 \to 1+4 = 5$

Da blir $g(a) \cdot g(b) = 5 \cdot 5 = 25 \to 2+5 = 7$. Dette betyr at $g(ab)$, dvs. den gjentatte tverrsummen til ab også må bli 7. Vi sjekker:

$$
\begin{array}{r}
3758 \cdot 347 \\
\hline
26306 \\
15032\cdot\; \\
11274\cdot\cdot \\
\hline
1304026
\end{array}
$$

$ab = 1304026 \to 1+3+4+2+6 = 16 \to 1+6 = 7$.

Vi fikk som ventet 7 begge ganger. Hvis vi i utregningen av ab hadde fått et svar som <u>ikke</u> hadde 7 som gjentatt tverrsum, så må svaret være feil. Hvis vi imidlertid bytter om to siffer i et korrekt svar, vil denne testen ikke avsløre det.

Avsnitt 4.2 fra læreboken Tallsystemer

Heltall oppgis vanligvis i det desimale tallsystemet eller 10-tallsystemet.

Eksempel Gitt tallet 3794. Dette kan skrives slik:

$$3794 = 3\cdot 1000 + 7\cdot 100 + 9\cdot 10 + 4 = 3\cdot 10^3 + 7\cdot 10^2 + 9\cdot 10^1 + 4\cdot 10^0$$

Tallet 10 er dermed grunntall i det desimale tallsystemet.

Alle hele tall $g > 1$ kan være grunntall i et tallsystem. La f.eks. $g = 12$. Da finnes det tall x, y, z og u som alle er fra 0 til 11, slik at

$$3794 = x\cdot 12^3 + y\cdot 12^2 + z\cdot 12 + u$$

Tallene x, y, z og u er gitt ved $x = 2$, $y = 2$, $z = 4$ og $u = 2$. Dermed er 3794 lik 2242 i 12-tallsystemet. Hvordan vi finner x, y, z og u kommer vi straks tilbake til.

I databehandling er det stort sett grunntallene 2, 8, 10 og 16 som brukes.

Grunntall	Tallsystem
2	binært
8	oktalt
10	desimalt
16	heksadesimalt

Brukes flere tallsystemer i samme tekst er det vanlig å oppgi tallets grunntall med en indeks.

Eksempel: 3794_{10}, 10110_2, 176_8, $A2F3_{16}$

I Java kan en oppgi tall på binær form ved å sette 0b (eller 0B) foran tallet, oktal form med 0 foran tallet og heksadesimal form ved 0x (eller 0X) foran tallet.

```
int a = 6767;              // oppgitt på desimal form
int b = 015157;            // oppgitt på oktal form (0 først)
int c = 0b1101001101111;   // oppgitt på binær form (0b først)
int d = 0x1A6F;            // oppgitt på heksadesimal form (0x først)

System.out.println(a + " " + b + " " + c + " " + d);

// Utskrift: 6767 6767 6767 6767
```

Konvertering mellom tallsystemer

Fra desimal til binær

Vi viser teknikken ved hjelp av et eksempel. Det blir på samme måte med andre tall.

La $a = 3794_{10}$. Vi setter opp flg. skjema:

3794	2
1897	0
948	1
474	0
237	0
118	1
59	0
29	1
14	1
7	0
3	1
1	1
0	1

Venstre kolonne inneholder kvotienten når det fortløpende deles med 2.

Høyre kolonne inneholder resten når det fortløpende deles med 2

Vi er ferdige når det blir 0 her

OBS Vi får sifrene i motsatt rekkefølge. Siste siffer øverst, osv.

Svar: $3794_{10} = 111011010010_2$

Algoritmen er slik: $a \bmod 2$ gir siste binære siffer. Sett så $a = a \operatorname{div} 2$. Dermed vil $a \bmod 2$ gi nest siste siffer, osv.

Javakode som bruker denne teknikken for et generelt grunntall g:

```
public static void main(String... args)
{
  int g = 2;  // g er grunntallet
  int a = 12345;

  StringBuilder s = new StringBuilder();
  while (a > 0)
  {
    int siffer = a % g;  // a mod g

    if (siffer >= 10)
      s.append((char)('A' + siffer - 10));
    else
      s.append(siffer);

    a = a / g;   // a = a div g
  }

  System.out.println(s.reverse());  // motsatt vei
}
```

I Javakoden er g satt til 2. Prøv med andre tall a og andre grunntall enn 2. Hvis $g = 16$, bruker vi A, B, C, D, E og F som siffer. $A = 10$, $B = 11$, osv.

Generell teknikk

Gitt et grunntall $g > 1$ og et positivt heltall a. Da kan a skrives entydig på formen:

$$a = s_m g^m + s_{m-1} g^{m-1} + \cdots + s_2 g^2 + s_1 g^1 + s_0 g^0$$

der $0 \le s_i < g$ for $i = 0, 1, \ldots, m$.

Eksempel: $3794_{10} = 7 \cdot 8^3 + 3 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8^1 + 2 \cdot 8^0 = 7322_8$

Vi finner siste siffer s_0 ved $s_0 = a \bmod g$. Så setter vi $a = a \operatorname{div} g$. Dermed blir $s_1 = a \bmod g$. Osv.

Eksempel 1 La 8 være grunntall og $a = 1234_{10}$.

$$
\begin{array}{r|l}
1234 & 8 \\
\hline
154 & 2 \\
19 & 2 \\
2 & 3 \\
0 & 2
\end{array}
$$

1234 div 8 → 154, 2 ← 1234 mod 8

154 div 8 → 19, 2 ← 154 mod 8

osv osv

Svar: $1234_{10} = 2322_8$

Fra binære tall til oktale, heksadesimale og desimale tall

Eksempel Gitt $a = 1101101110010110_2$

Skal vi finne a som oktalt tall grupperer vi tre og tre binære siffer fra høyre mot venstre.

$$a = \underset{1}{1}\,|\,\underset{5}{101}\,|\,\underset{5}{101}\,|\,\underset{6}{110}\,|\,\underset{2}{010}\,|\,\underset{6}{110}_2$$

Hver gruppe på tre konverteres til et oktalt siffer etter flg. regel:

binært	000	001	010	011	100	101	110	111
oktalt	0	1	2	3	4	5	6	7

Dermed blir $a = 155626$.

OBS Hvis det er færre enn tre siffer i gruppen lengst til venstre, kan vi legge på en eller to 0-er slik at det blir tre siffer.

Eksempel $a = 10101110_2 = 10|101|110 = \underset{2}{010}|\underset{5}{101}|\underset{6}{110} = 256_8$

Heksadesimale tall

La $a = 1011011100101 10_2$. Gruppér fire og fire binære siffer fra høyre mot venstre.

$$a = 101|1011|1001|0110_2$$

Gruppen lengst til venstre har kun tre binære siffer. Da kan vi legge på en ekstra 0 forrest. Dermed 0101. Sifrene i hver gruppe konverteres til et heksadesimalt siffer etter flg. regel:

binært	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111
heksadesimalt	0	1	2	3	4	5	6	7

1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111
8	9	A	B	C	D	E	F

Det gir $a = 5B96_{16}$.

Fra binært til desimalt

La $a = 101101110010110_2$. Hvert siffer representerer en potens av 2. Det kan settes opp slik:

$a =$	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0
	16384	8192	4096	2048	1024	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1

Her kan vi finne a på desimal form ved å summere de potensene som hører til 1-sifrene.

En enklere vei

Vi kan først konvertere til et heksadesimalt tall. Dvs. $a = 5B96_{16}$. Dermed får vi $a = 5\cdot 16^3 + B\cdot 16^2 + 9\cdot 16 + 6$

$$= 5\cdot 16^3 + \underset{\substack{\uparrow \\ B}}{11}\cdot 16^2 + 9\cdot 16 + 6 = ((5\cdot 16 + 11)16 + 9)16 + 6$$

$$= (91\cdot 16 + 9)16 + 6 = 1465\cdot 16 + 6 = 23446_{10}$$