

Chapter 9 - Discrete Mathematics and Its Applications

Løsningsforslag på utvalgte oppgaver

Avsnitt 9.6

Oppgave 1

- a) Den er både refleksiv, antisymmetrisk og transitiv. Dermed er den en partiell ordning.
- b) Den er ikke antisymmetrisk siden $(2,3) \in R$ og $(3,2) \in R$. Dermed er det ikke en partiell ordning.
- c) Den er både refleksiv, antisymmetrisk og transitiv. Dermed er den en partiell ordning.
- d) Den er både refleksiv, antisymmetrisk og transitiv. Dermed er den en partiell ordning.
- e) Den er ikke antisymmetrisk siden $(0,1) \in R$ og $(1,0) \in R$. Dermed er det ikke en partiell ordning.

Oppgave 3

Husk at *poset* betyr «partially ordered set». På norsk sier vi *delvis ordnet mengde* eller *partielt ordnet mengde*.

- a) Dette kalles identitetsrelasjonen og den gir en partiell ordning.
- b) Er relasjonen på Z gitt ved $R = \{(a,b) \mid a \in Z, b \in Z \text{ og } a \neq b\}$ er en partiell ordning? Det er ikke sant at $a \neq a$ og dermed er ikke relasjonen refleksiv. Da er den ikke en partiell ordning.
- c) Er relasjonen på Z gitt ved $R = \{(a,b) \mid a \in Z, b \in Z \text{ og } a \geq b\}$? Den er refleksiv siden $a \geq a$ for alle hele tall. Den er antisymmetrisk siden vi ikke kan ha at $b \geq a$ hvis $a \neq b$ og $a \geq b$. Den er transitiv! Hvis $a \geq b$ og $b \geq c$, så er $a \geq c$. Dermed er dette en partiell ordning.
- d) Her skal a være relatert til b hvis a ikke går opp i b . Den er ikke refleksiv og dermed ingen partiell ordning.

Oppgave 5

- a) Hvis dette for eksempel er en relasjon R på mengden $\{1,2,3\}$, så vil den ha parene $\{(1,1), (1,2), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3)\}$. Vi ser at den ikke er antisymmetrisk: $(1,2) \in R$ og $(2,1) \in R$. Den er derfor ingen partiell ordning.
- b) Relasjonen R som denne matrisen hører til, er refleksiv, antisymmetrisk og transitiv. Det er derfor en partiell ordning.
- c) Relasjonen R som denne matrisen hører til, er refleksiv og antisymmetrisk, men ikke transitiv. Hvis dette er en relasjon på for eksempel $\{1,2,3,4\}$, så er $(2,3) \in R$ og $(3,4) \in R$, men $(2,4) \notin R$. Det er derfor ingen partiell ordning.

Oppgave 6

Grafen representerer en relasjon som er refleksiv og antisymmetrisk, men ikke transitiv. For eksempel er $(a,b) \in R$ og $(b,d) \in R$, men $(a,d) \notin R$. Det er derfor ingen partiell ordning.

Oppgave 7

Grafen representerer en relasjon som er refleksiv, antisymmetrisk og transitiv. Det er derfor en partiell ordning.

Oppgave 10

- a) 5 og 15 er sammenlignbare siden 5 går opp i 15
- b) 6 og 9 er ikke sammenlignbare siden 6 ikke går opp i 9.
- c) 8 er sammenlignbar med 16 siden 8 går opp i 16.
- d) 7 er sammenlignbar med 7 siden 7 går opp i 7.

Oppgave 11

- a) Mengden $\{0,1\}$ er ikke sammenlignbar med mengden $\{1,2\}$ siden den første ikke er en delmengde av den andre.
- b) 4 er ikke sammenlignbar med 6 siden 4 ikke går opp i 6.

Oppgave 12

- a) Den leksikografiske ordningen sier at (a,b) er «mindre enn» (c,d) hvis a er «mindre enn» c eller hvis a og c er like og b er «mindre enn» d . Det betyr spesielt at $(1,1)$, $(1,2)$, $(1,3)$ og $(1,4)$ er «mindre enn» $(2,3)$ siden 1 er mindre enn 2. Men også $(2,1)$ og $(2,2)$ er «mindre enn» $(2,3)$ siden 2 er lik 2 og både 1 og 2 er mindre enn 3.

- b) Det blir $(3, 2)$, $(3, 3)$, $(3, 4)$, $(4, 1)$, $(4, 2)$, $(4, 3)$ og $(4, 4)$.

Oppgave 13

- a) $(1, 1, 2)$ kommer foran $(1, 2, 1)$
- b) $(0, 1, 2, 3)$ kommer foran $(0, 1, 3, 2)$
- c) $(0, 1, 1, 1, 0)$ kommer foran $1, 0, 1, 0, 1$

Oppgave 23

Her har vi mengden $A = \{ 3, 5, 9, 15, 24, 45 \}$ med relasjonen R definert ved at $(a, b) \in R$ hvis tallet a går opp i tallet b . Med andre ord er a «mindre enn eller lik» b det samme som at a går opp i b .

- a) Et element a er maksimalt hvis det ikke finnes noe tall b forskjellig fra a som a går opp i. Derfor er både 24 og 45 maksimale elementer. Det er ingen andre av de seks tallene som 24 går opp i og det er heller ingen som 45 går opp i. Ingen av de andre kan være maksimale. 3 er ikke maksimalt siden 3 går opp i 9, 5 er ikke maksimalt siden 5 går opp i 15, 9 er ikke maksimalt siden 9 går opp i 45 og 15 er ikke maksimalt siden 15 går opp i 45.
- b) Det blir omvendt for minimale elementer. Et element a minimalt hvis det ikke finnes noe tall b forskjellig fra a som går opp i a . Det betyr at 3 og 5 er minimale elementer. Ingen av tallene 9, 15, 24 og 45 er minimale siden det for hver av dem finnes et annet tall som går opp, f.eks. 3.
- c) Et element er størst (eng: greatest) hvis alle andre elementer er «mindre enn» dette elementet. Et største element måtte her være et som alle de andre går opp i. Men noe slikt finnes ikke.
- d) Et element er minst (eng: least) hvis alle andre elementer er «større enn» dette elementet. Et minste element måtte være et som går opp i alle de andre. Men noe slikt finnes ikke.
- e) Et element c er en øvre grense (eng: upper bound) for to elementer a og b hvis både a og b er «mindre enn eller lik» c . Alle tall som både 3 og 5 går opp er dermed en øvre grense for 3 og 5. Det blir tallene 15 og 45.
- f) Den minste øvre grensen (eng: least upper bound) er den «minste» av de øvre grensene hvis en slik finnes. I dette tilfellet vil 15 være den minste øvre grensen for 3 og 5,

- g) Et element c er en nedre grense (eng: lower bound) for to elementer a og b hvis både a og b er «større enn eller lik» c . Alle tall som går opp i både 15 og 45 er dermed en nedre grense for 15 og 45. Det betyr at både 3, 5 og 15 (men ingen andre) er nedre grense for 15 og 45.
- h) Den største nedre grensen (eng: greatest lower bound) er den «største» av de nedre grensene hvis en slik finnes. I dette tilfellet vil 15 være den største nedre grensen for 15 og 45,

Oppgave 24

Her er det en samling mengder der en mengde A er relatert til en mengde B hvis $A \subseteq B$, dvs. hvis A er en delmengde av B .

- a) En mengde A er maksimal hvis det ikke finnes noen mengde B forskjellig fra A slik at $A \subseteq B$. Mengdene $\{1, 2\}$, $\{1, 3, 4\}$ og $\{2, 3, 4\}$ er maksimale.
- b) En mengde A er minimal hvis det ikke finnes noen mengde B forskjellig fra A slik at $B \subseteq A$. Mengdene $\{1\}$, $\{2\}$ og $\{4\}$ er minimale.
- c) Det finnes ingen største mengde, dvs. en som alle er inneholdt i.
- d) Det finnes ingen minste mengde, dvs. en som er inneholdt i alle.
- e) En mengde A er en øvre grense for $\{2\}$ og $\{4\}$ hvis $\{2\} \subseteq A$ og $\{4\} \subseteq A$. Dermed er $\{2, 4\}$ og $\{2, 3, 4\}$ øvre grenser.
- f) A er den minste øvre grensen for $\{2\}$ og $\{4\}$ hvis det ikke finnes en øvre grense B for $\{2\}$ og $\{4\}$ forskjellig fra A slik at $B \subseteq A$. Det betyr at $\{2, 4\}$ er den minste øvre grensen.
- g) En mengde A er en nedre grense for $\{1, 3, 4\}$ og $\{2, 3, 4\}$ hvis $A \subseteq \{1, 3, 4\}$ og $A \subseteq \{2, 3, 4\}$. Det betyr at $\{4\}$ og $\{3, 4\}$ er nedre grenser.
- h) Mengden $\{3, 4\}$ er den største nedre grensen for $\{1, 3, 4\}$ og $\{2, 3, 4\}$.