Chapter 9 - Discrete Mathematics and Its Applications

Løsningsforslag på utvalgte oppgaver

Avsnitt 9.4

Oppgave 1

Gitt $A = \{0, 1, 2, 3\}$ og $R = \{(0,1), (1,1), (1,2), (2,0), (2,2), (3,0)\}$

a) Vi finner den refleksive tillukningen ved å ta med de parene (a,a) som måtte mangle, dvs. (0,0) og (3,3),

b) Vi finner den symmetriske tillukningen ved å ta med, for hvert par (a,b) som er med, også paret (b,a) hvis det ikke er med. Dvs. vi må ta med (0,2), (0,3), (1,0), (2,1).

Oppgave 19 a)

Gitt $A = \{1,2,3,4,5\}$ og $R = \{(1,3),(2,4),(3,1),(3,5),(4,3),(5,1),(5,2),(5,4)\}$.

Et par (a,c) hører med i R^2 hvis og bare hvis det finnes en b slik at både (a,b) og (b,c) er i R. Vi har at (1,3) og (3,1) er i R og dermed er (1,1) i R^2. Vi kan sette dette opp i tabellform:

$(a,b) \in R$	$(b,c) \in R$	$(a,c) \in R^2$
(1,3)	(3,1)	(1,1)
(1,3)	(3,5)	(1,5)
(2,4)	(4,3)	(2,3)
(3,1)	(1,3)	(3,3)
(3,5)	(5,1)	(3,1)
(3,5)	(5,2)	(3,2)
(3,5)	(5,4)	(3,4)
(4,3)	(3,1)	(4,1)
(4,3)	(3,5)	(4,5)
(5,1)	(1,3)	(5,3)
(5,2)	(2,4)	(5,4)
(5,3)	(4,3)	(5,3)

Par som står oppført to eller flere ganger tas med bare en gang. Dermed:

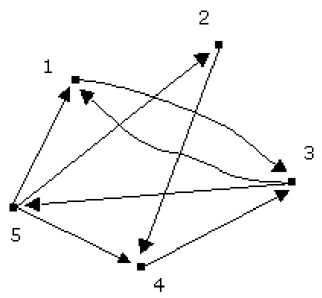
$$R^2 = \{(1,1),(1,5),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,5),(5,3),(5,4)\}$$

Oppgave 19a) kan også løses ved hjelp av matriseregning, dvs. vi kan finne matrisen til R^2:

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad M_R^{[2]} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

Her finner vi R^2 ved å plukke ut tallparene ved hjelp av $M_R^{[2]}$.

Oppgave 19a) kan også løses ved å studere grafen til relasjonen *R*. Et par $(a,b) \in R^2$ hvis og bare hvis det går en vei fra *a* til *b* med lengde 2.



Vi ser på grafen G_R til *R* at veien 2,4,3 har lengde 2 og går fra 2 til 3. Dermed vil $(2,3) \in R^2$. Veien 1,3,1 har lengde 2 og går fra 1 til 1, dvs. $(1,1) \in R^2$. Osv.

Oppgave 25 a)

$$M_{R^*} = M_R \vee M_R^{[2]} \vee M_R^{[3]} \vee M_R^{[4]}$$

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_R^{[2]} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_R^{[3]} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ og}$$

$$M_R^{[4]} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \text{ Dermed får vi } M_{R^*} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$