

Chapter 9 - Discrete Mathematics and Its Applications

Løsningsforslag på utvalgte oppgaver

Avsnitt 9.1

Oppgave 1

$A = \{0,1,2,3,4\}$ og $B = \{0,1,2,3\}$

- a) $R = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B, a = b\} = \{(0,0), (1,1), (2,2), (3,3)\}$
- b) $R = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B, a + b = 4\} = \{(1,3), (2,2), (3,1), (4,0)\}$
- c) $R = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B, a > b\} = \{(1,0), (2,0), (2,1), (3,0), (3,1), (3,2), (4,0), (4,1), (4,2), (4,3)\}$
- d) $R = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B, a \mid b\} = \{(1,0), (1,1), (1,2), (1,3), (2,0), (2,2), (3,0), (3,3), (4,0)\}$
- e) $R = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B, \gcd(a,b) = 1\} = \{(0,1), (1,0), (1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,3), (3,1), (3,2), (4,1), (4,3)\}$
- f) $R = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B, \text{lcm}(a,b) = 2\} = \{(1,2), (2,1), (2,2)\}$

Oppgave 2

- a) Ikke refleksiv siden $(1,1)$ og $(4,4)$ mangler. Ikke symmetrisk siden $(2,4)$ er med, men ikke $(4,2)$. Ikke antisymmetrisk siden både $(2,3)$ og $(3,2)$ er med. Den er transitiv.
- b) Refleksiv siden både $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,3)$ og $(4,4)$ er med. Symmetrisk siden det ikke finnes noen a og b der (a,b) er med, mens (b,a) ikke er med. Ikke antisymmetrisk siden både $(1,2)$ og $(2,1)$ er med. Er transitiv.
- c) Ikke refleksiv – mangler $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,3)$ og $(4,4)$. Symmetrisk siden både $(2,4)$ og $(4,2)$ er med. Ikke antisymmetrisk siden både $(2,4)$ og $(4,2)$ er med. Ikke transitiv. Den ville ha blitt transitiv hvis $(2,2)$ og $(4,4)$ var med i tillegg.
- d) Ikke refleksiv – mangler $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,3)$ og $(4,4)$. Ikke symmetrisk siden for eksempel $(1,2)$ er med, men ikke $(2,1)$. Er antisymmetrisk. Ikke transitiv siden $(1,2)$ og $(2,3)$ er med, men ikke $(1,3)$.
- e) Denne oppfylles alle fire.

- f) Ikke refleksiv – mangler $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,3)$ og $(4,4)$. Ikke symmetrisk siden for eksempel $(1,4)$ er med, men ikke $(4,1)$. Ikke antisymmetrisk siden både $(1,3)$ og $(3,1)$ er med. Ikke transitiv siden for eksempel $(1,3)$ og $(3,1)$ er med, men ikke $(1,1)$.

Oppgave 4

- a) Ikke refleksiv siden (x, x) mangler. Symmetrisk siden både (x, y) og (y, x) er med for alle x forskjellig fra y . Ikke antisymmetrisk siden det finnes forskjellige verdier x og y slik at både (x, y) og (y, x) er med. Ikke transitiv siden (x, y) og (y, x) er med, men ikke (x, x) .
- b) Ikke refleksiv siden $(0,0)$ ikke er med. Er symmetrisk siden $xy \geq 1$ er det samme som at $yx \geq 1$. Ikke antisymmetrisk. Hvis $xy \geq 1$ og $yz \geq 1$, må enten alle være positive eller alle negative. Dermed må $xz \geq 1$. Dvs. relasjonen er transitiv.
- c)
- d) Refleksiv siden $x \equiv x \pmod{7}$ for alle x . Symmetrisk siden $x \equiv y \pmod{7}$ gir at $y \equiv x \pmod{7}$. Ikke antisymmetrisk. Transitiv siden $x \equiv y \pmod{7}$ og $y \equiv z \pmod{7}$ medfører at $x \equiv z \pmod{7}$. Denne spesielle relasjonen kalles en ekvivalensrelasjon. Mer generelt: En relasjon kalles en ekvivalensrelasjon hvis den er refleksiv, symmetrisk og transitiv.