Chapter 8 - Discrete Mathematics and Its Applications

Løsningsforslag på utvalgte oppgaver

Avsnitt 8.2

Oppgave 2

a) Generell løsning $a_n = \alpha 2^n$. Betingelsen $a_0 = 3$ gir $\alpha = 3$ og dermed $a_n = 3 \cdot 2^n$.

b) Generell løsning $a_n = \alpha$. Startbetingelsen $a_0 = 2$ gir $\alpha = 2$ og dermed $a_n = 2$.

c) Det karakteristiske polynomet $r^2 - 5r + 6$ har røttene $r_1 = 3$ og $r_2 = 2$. Generell løsning $a_n = \alpha_1 3^n + \alpha_2 2^n$. Startbetingelsen $a_0 = 1$ og $a_1 = 0$ gir $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ og $3\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0$. Dermed $\alpha_1 = -2$ og $\alpha_2 = 3$. Løsningen blir $a_n = -2 \cdot 3^n + 3 \cdot 2^n$.

d) Det karakteristiske polynomet $r^2 - 4r + 4$ har sammenfallende rot $r_0 = 2$. Generell løsning $a_n = \alpha_1 2^n + \alpha_2 n 2^n$. Startbetingelsen $a_0 = 6$ og $a_1 = 8$ gir $\alpha_1 = 6$ og $2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 8$. Dermed $\alpha_1 = 6$ og $\alpha_2 = -2$. Løsningen blir $a_n = (6 - 2n)2^n$.

e) Det karakteristiske polynomet $r^2 + 4r + 4$ har sammenfallende rot $r_0 = -2$. Generell løsning $a_n = \alpha_1(-2)^n + \alpha_2 n(-2)^n$. Startbetingelsen $a_0 = 0$ og $a_1 = 1$ gir $\alpha_1 = 0$ og $-2\alpha_1 - 2\alpha_2 = 1$. Dermed $\alpha_1 = 0$ og $\alpha_2 = -1/2$. Løsningen blir $a_n = -(1/2)n(-2)^n = n(-2)^{n-1}$.

f) Det karakteristiske polynomet $r^2 - 4$ har røttene $r_1 = 2$ og $r_2 = -2$. Generell løsning $a_n = \alpha_1 2^n + \alpha_2(-2)^n$. Startbetingelsen $a_0 = 0$ og $a_1 = 4$ gir $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ og $2\alpha_1 - 2\alpha_2 = 4$. Dermed $\alpha_1 = 1$ og $\alpha_2 = -1$. Løsningen blir $a_n = 2^n - (-2)^n$.

g) Det karakteristiske polynomet $r^2 - 1/4$ har røttene $r_1 = 1/2$ og $r_2 = -1/2$. Generell løsning $a_n = \alpha_1(1/2)^n + \alpha_2(-1/2)^n$. Startbetingelsen $a_0 = 1$ og $a_1 = 0$ gir $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ og $(1/2)\alpha_1 - (1/2)\alpha_2 = 0$. Dermed $\alpha_1 = 1/2$ og $\alpha_2 = 1/2$. Løsningen blir $a_n = (1/2)(1/2)^n + (1/2)(-1/2)^n = (1/2)^{n+1} - (-1/2)^{n+1}$.

Oppgave 5

La a_n , $n \geq 1$, være antallet måter vi kan fylle et brett av størrelse $2 \times n$ med brikker av størrelse 2×1 og 2×2. Her skal brikkene med størrelse 2×1 kunne legges vertikalt og horisontalt. Hvis brettet er 2×1 kan det fylles på kun én måte, dvs. $a_1 = 1$. Hvis brettet er 2×2 kan det fylles på tre måter – enten to 2×1 brikker horisontalt, to 2×1 brikker vertikalt eller med én 2×2 brikke.

Vi får $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$, $n \geq 3$ og startbetingelsene $a_1 = 1$ og $a_2 = 3$ fordi vi kan ha en vertikal 2×1 brikke, to horisontale 2×1 brikker eller en 2×2 brikke bakerst. Hvis vi har en vertikal 2×1 brikke bakerst kan resten som er $2 \times (n-1)$, fylles på a_{n-1} måter. Hvis vi har to horisontale 2×1 brikker bakerst kan resten som er $2 \times (n-2)$, fylles på a_{n-2} måter. Hvis vi har en 2×2 brikke bakerst kan resten som er $2 \times (n-2)$, fylles på a_{n-2} måter. Dermed $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$, $n \geq 3$. Det karakteristiske polynomet $r^2 - r - 2$ har røttene $r_1 = 2$ og $r_2 = -1$. Generell løsning $a_n = \alpha_1 2^n + \alpha_2 (-1)^n$. Startbetingelsen $a_1 = 1$ og $a_2 = 3$ gir $2\alpha_1 - \alpha_2 = 1$ og $4\alpha_1 + \alpha_2 = 3$. Dermed $\alpha_1 = 2/3$ og $\alpha_2 = 1/3$. Løsningen blir $a_n = (2 \cdot 2^n + (-1)^n)/3 = (2^{n+1} + (-1)^n)/3$.