Chapter 8 - Discrete Mathematics and Its Applications

Løsningsforslag på utvalgte oppgaver

Avsnitt 8.1

Oppgave 5

a) La a_n være antallet bitsekvenser som inneholder to 0-biter på rad (a pair of consecutive 0s). Hvis $n \geq 2$, har vi tre muligheter for en bitsekvens med *n* biter og som inneholder to 0-biter på rad: i) den ender på 1, ii) den ender på 10 eller ii) den ender på 00. Hvis vi tar en vilkårlig bitsekvens av denne typen med *n* – 1 biter får vi en med *n* biter ved å legge 1 bakerst. Tar vi en vilkårlig av denne typen med *n* – 2 biter får vi en med *n* biter ved å legge 10 bakerst. Vi kan imidlertid få en med 00 bakerst på to måter. Det er ved å ta en vilkårlig en av denne typen med *n* – 2 biter og så legge 00 bakerst og ved å ta en bitsekvens med *n* – 2 biter som **ikke** har to 0-biter på rad og legge 00 bakerst. Det finnes totalt 2^{n-2} forskjellige bitsekvenser med *n* – 2 biter og dermed $2^{n-2} - a_{n-2}$ stykker som ikke har to 0-biter på rad. Dette gir oss flg. regnestykke:

$$*)\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-2} + 2^{n-2} - a_{n-2} = a_{n-1} + a_{n-2} + 2^{n-2},\ n \geq 2$$

b) Det finnes nøyaktig én tom bitsekvens, men den har ikke to 0-biter på rad. Dvs. $a_0 = 0$. Det finnes to bitsekvenser med en bit. Det er 0 og 1, men ingen av dem har to 0-biter på rad. Dermed $a_1 = 0$. Vi har fire bitsekvenser med to biter. Det er 11, 10, 01 og 00. Her har 00 to 0-biter på rad. Det betyr at $a_2 = 1$. Videre ser vi at tre av flg. åtte bitsekvenser med tre biter har to 0-biter på rad: 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110 og 111. Det de tre sekvensene 000, 001 og 100 som har to 0-biter på rad. Det betyr at $a_3 = 3$.

c) Formelen *) gir $a_4 = a_3 + a_2 + 2^2 = 3 + 1 + 4 = 8$, $a_5 = a_4 + a_3 + 2^3 = 8 + 3 + 8 = 19$, $a_6 = a_5 + a_4 + 2^4 = 19 + 8 + 16 = 43$ og $a_7 = a_6 + a_5 + 2^5 = 43 + 19 + 32 = 94$. Vi kan sjekke tilfellet *n* = 4 ved å ramse opp de 16 mulige sekvensene: 0000, 0001, 0010, 0011, 0100, 0101, 0110, 0111. 1000, 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1110 og 1111. Vi ser at 0000, 0001, 0010, 0011, 0100, 1000, 1001 og 1100 har to 0-biter på rad. Til sammen 8 stykker.

Oppgave 18

La a_n , $n \geq 1$, være antallet måter vi kan fylle et brett av størrelse $2 \times n$ med dominobrikker. Brikkene kan legges horisontalt eller vertikalt. Hvis brettet er 2×1 kan det fylles på kun én måte, dvs. $a_1 = 1$. Hvis brettet er 2×2 kan det fylles på to måter – enten ved å legge to dominobrikker horisontalt eller 2 brikker vertikalt. Hvis brettet er 2×3 kan det fylles på tre måter: 1) Tre vertikale brikker, 2) en vertikal og to horisontale og 3) to horisontale og en vertikal.

a) Vi får $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $n \geq 3$ fordi vi kan ha en vertikal brikke bakerst eller to horisontale bakerst. Hvis vi har en vertikal brikke bakerst kan resten av brettet som er $2 \times (n-1)$, fylles på a_{n-1} måter. Hvis vi har to horisontale brikker bakerst kan resten som er $2 \times (n-2)$, fylles på a_{n-2} måter.

b) Vi har $a_1 = 1$ og $a_2 = 2$.

c) Vi ser at differensligningen gir oss Fibonacci-tall, dvs. 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... Med litt arbeid finner vi at $a_{17} = 2584$.

Oppgave 19

Det skal legges stenheller av nøyaktig samme størrelse på en gangvei. Hellene har fargene rød, grønn og grå. Det skal være én helle i bredden i hele gangveiens lengde og hellene kan kombineres som vi vil så sant det ikke blir to røde heller ved siden av hverandre. La a_n være antallet forskjellige måter dette kan gjøres hvis det er *n* heller som skal legges ut.

a) Hvis vi har *n* – 1 heller som oppfyller kravet, får vi *n* heller som oppfyller kravet ved å legge en grønn eller grå helle bakerst. En rød helle bakerst går bra kun hvis den siste av de *n* – 1 hellene ikke har en rød bakerst. Alle muligheter med *n* – 1 heller der det er en rød helle bakerst får vi ved å alle mulighetene med *n* – 2 heller og så legge en grønn eller grå helle bakerst. Dette gir flg. sammenheng:

$$a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2} \ , \ \ n \geq 2$$

b) Her er det kanskje litt kunstig å starte med a_0. Men vi kan si at det finnes bare én gangvei med 0 heller og den har ikke to røde heller ved siden av hverandre. Altså blir $a_0 = 1$. Det er tre forskjellige gangveier med bare én helle (grønn, grå eller rød) og ingen av dem har to røde heller ved siden av hverandre. Vi kan også ta med a_2. Det er ni muligheter med to heller: grønn/grønn, grønn/grå, grønn/rød, grå/grønn, grå/grå, grå/rød, rød/grønn, rød/grå og rød/rød. Vi ser at alle bortsett fra den siste oppfyller kravet om at det ikke skal være to røde heller ved siden av hverandre. Dvs. $a_2 = 8$.

c) Vi har $a_3 = 2a_2 + 2a_1 = 2 \cdot 8 + 2 \cdot 3 = 22$, $a_4 = 2a_3 + 2a_2 = 2 \cdot 22 + 2 \cdot 8 = 60$, $a_5 = 2a_4 + 2a_3 = 2 \cdot 60 + 2 \cdot 22 = 164$, $a_6 = 2a_5 + 2a_4 = 2 \cdot 164 + 2 \cdot 60 = 448$ og $a_7 = 2a_6 + 2a_5 = 2 \cdot 448 + 2 \cdot 164 = 1224$.