

Chapter 6 - Discrete Mathematics and Its Applications

Løsningsforslag på utvalgte oppgaver

Avsnitt 6.3

Oppgave 1

Tre verdier kan permuteres på $3! = 6$ måter. For a , b og c blir det:
 a,b,c a,c,b b,a,c b,c,a c,a,b c,b,a

Oppgave 2

Med 7 verdier blir antall permutasjoner lik $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$.

Oppgave 3

Permutasjonen skal ende med a , men de 6 andre bokstavene foran kan permuteres på $6! = 720$ måter. Dermed blir det 720 permutasjoner av a , b , c , d , e , f , g der a står sist.

Oppgave 5

Det er $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 15.120$ forskjellige 5-permutasjoner.

Oppgave 7

- a) Nøyaktig 4 av de 10 plassene skal inneholde 1-ere. Vi kan velge de 4 plassene på

$$\binom{10}{4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210 \text{ måter.}$$

- b) Da skal 0, 1, 2, 3 eller 4 av plassene inneholde 1-ere. Antallet muligheter blir da

$$\binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \binom{10}{3} + \binom{10}{4} = 1 + 10 + 45 + 120 + 210 = 386.$$

- c) Minst 4 er det motsatt av maksimalt 3. Husk formelen $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$.

$$\begin{aligned} \text{Svaret blir } 2^{10} - \left(\binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \binom{10}{3} \right) = \\ 1024 - (1 + 10 + 45 + 120) = 1024 - 176 = 848. \end{aligned}$$

- d) Da må det være nøyaktig 5 1-ere, dvs. $\binom{10}{5} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 252$.

Oppgave 8

La K stå for kvinne og M for mann. Vi har flg. to mulige oppstillinger:

- 1) $KMKMKM \dots KM$
- 2) $MKMKMK \dots MK$

I de to oppstillingene kan de n kvinnene og de n mennene omstokkes uavhengig av hverandre. Til sammen $n! \cdot n! + n! \cdot n! = 2(n!)^2$ muligheter.

Oppgave 9

Vi skal plukke ut mengder på 5 bokstaver fra det engelske alfabetet. Dette må vi tolke som uordnet utvalg (uten tilbakelegging). Svaret blir

$$\binom{26}{5} = \frac{26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 65.780$$

Oppgave 10

$$\binom{10}{1} + \binom{10}{3} + \binom{10}{5} + \binom{10}{7} + \binom{10}{9} = 2\binom{10}{1} + 2\binom{10}{3} + \binom{10}{5} = 2 \cdot 10 + 2 \cdot 120 + 252 = 512.$$

Oppgave 12

En mynt som kastes 10 ganger gir oss enten mynt eller krone.

- a) Hvor mange utfall blir det? Det er to utfall i første kast, to nye utfall i 2. kast, osv. Til sammen $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 = 2^{10} = 1024$.

- b) Nøyaktig to av kastene må gi krone og det kan skje på

$$\binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} = 45 \text{ måter.}$$

- c) Kastene må gi mynt 0, 1, 2 eller 3 ganger, dvs.

$$\binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \binom{10}{3} = 1 + 10 + 45 + 120 = 176.$$

- d) $\binom{10}{5} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 252$

Oppgave 13

Gitt bokstavene A, B, C, D, E, F, G .

- a) Vi kan se på BCD som en enhet, dvs. vi har de 5 enhetene A, BCD, E, F og G og disse 5 enhetene kan settes sammen på $5! = 120$ måter.
- b) Nå ser vi på $CFGA$ som en enhet får vi de 4 enhetene $B, CFGA, D$ og E , og disse 4 enhetene kan settes sammen på $4! = 24$ måter.
- c) Nå ser vi på BA og GF som hver sine enheter, dvs. vi har de 5 enhetene BA, GF, C, D og E , og disse 5 enhetene kan settes sammen på $5! = 120$ måter.
- d) Nå ser vi på ABC og DE som hver sine enheter, dvs. vi har de 4 enhetene ABC, DE, F og G . De kan settes sammen på $4! = 24$ måter.
- e) Skal den inneholde både ABC og CDE må den inneholde $ABCDE$. Dermed blir det 3 enheter som kan permuteres på $3! = 6$ måter.
- f) Dette er umulig å få til, dvs. 0 muligheter.

Oppgave 14

De 8 mennene kan stille seg opp på $8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40.320$ forskjellige måter. To kvinner kan ikke stå ved siden av hverandre. En kvinne må derfor plasseres lengst til venstre, lengst til høyre eller mellom to menn. Det gir 9 mulige plasseringer for hver enkelt kvinne. Første kvinne kan plasseres på 9 steder, andre kvinne på 8 steder, osv. til femte kvinne på 5 steder. Til sammen $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 15.120$ muligheter. Kvinnenes og mennenes innbyrdes plasseringer er uavhengige av hverandre. Produktregelen gir dermed at det blir $40.320 \cdot 15.120 = 609.638.400$ muligheter.