

Chapter 6 - Discrete Mathematics and Its Applications

Løsningsforslag på utvalgte oppgaver

Avsnitt 6.1

Oppgave 1

- a) Valget av en fra matematikk og en fra data er uavhengig av hverandre. Dermed blir det $18 \cdot 325 = 5850$ muligheter.
- b) Det kan velges enten en fra matematikk eller en fra data, Dermed blir det $18 + 325 = 343$ muligheter.

Oppgave 2

Når et spørsmål har 4 svaralternativer og vi må avgi et svar, kan vi svare på 4 forskjellige måter. Hvis det er to spørsmål der begge har 4 svaralternativer, kan vi for hvert av de 4 alternativene på første spørsmål velge fritt blant de 4 alternativene på andre spørsmål. Dette gir $4^2 = 16$ muligheter.

- a) Når det er 10 spørsmål blir det $4^{10} = 1048576$ svarmuligheter.
- b) Hvis det er mulig å svare blankt (dvs. vet ikke) blir det 5 svaralternativer på hvert spørsmål, og dermed $5^{10} = 9765625$ mulige måter å svare på.

Oppgave 4

«Three-letter initials» betyr initialer på 3 bokstaver – for eksempel ABC, ABA, BAB, osv. Med engelsk alfabetet blir det 26 mulige bokstaver på 1. plass, 26 mulige på 2. plass og 26 mulige på 3. plass. Dermed $26^3 = 17576$ mulige kombinasjoner. På norsk blir det $29^3 = 24389$.

Oppgave 5

Det må være 1 både på første og siste plass, men på de 8 øvrige plassene er det 2 muligheter på hver plass. Dermed $1 \cdot 2^8 \cdot 1 = 2^8 = 256$ muligheter.

Oppgave 7

Det må være 1 både på første og siste plass, men på de $n - 2$ øvrige plassene er det 2 muligheter. Dermed $1 \cdot 2^{n-2} \cdot 1 = 2^{n-2}$ muligheter.

Teori til oppgavene 11 og 12

La n og k være positive heltall. Hvor mange av tallene $1, 2, \dots, n$ er delelig med k ? Svar: $n \text{ div } k$, dvs. kvotienten når n deles med k .

La n , k_1 og k_2 være positive heltall. Hvor mange av tallene $1, 2, \dots, n$ er delelig med både k_1 og k_2 ? Svar: $n \text{ div } k$ der k er minste felles multiplum for k_1 og k_2 . Obs: hvis k_1 og k_2 er relativt primiske, er minste felles multiplum for k_1 og k_2 lik $k_1 \cdot k_2$.

Oppgave 11

Det står tallene mellom 50 og 100, dvs. 51, . . . , 99.

- a) Flg. 7 tall mellom 50 og 100 er delelig med 7: 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98. Dette antallet er også gitt ved $(99 \text{ div } 7) - (50 \text{ div } 7) = 14 - 7 = 7$.
- b) Flg. 5 tall mellom 50 og 100 er delelig med 11: 55, 66, 77, 88, 99. Dette antallet er også gitt ved $(99 \text{ div } 11) - (50 \text{ div } 11) = 9 - 4 = 5$.
- c) Tallene 7 og 11 er innbyrdes primiske. Et tall er derfor delelig med både 7 og 11 hvis og bare hvis det er delelig med 77. Derfor er kun 77 av tallene mellom 50 og 100 delelig med 77. Antallet er også gitt ved $(99 \text{ div } 77) - (50 \text{ div } 77) = 1 - 0 = 1$.

Oppgave 12

Det står tallene «between 100 and 999 inclusive», dvs. fra og med 100 til og med 999:

- a) $(999 \text{ div } 7) - (99 \text{ div } 7) = 142 - 14 = 128$.
- b) Fra og med 100 til og med 999 er det 900 tall og halvparten av dem er oddetall, dvs. 450 oddetall.
- c) Det er tallene 111, 222, . . . , 999. Til sammen 9 stykker.
- d) $900 - ((999 \text{ div } 4) - (99 \text{ div } 4)) = 900 - 249 + 24 = 675$.
- e) Delelig med 4: $249 - 24 = 225$.
Delelig med 3: $(999 \text{ div } 3) - (99 \text{ div } 3) = 333 - 33 = 300$.
Delelig med 12: $(999 \text{ div } 12) - (99 \text{ div } 12) = 83 - 8 = 75$.
Delelig med 3 eller 4: $300 + 225 - 75 = 450$.
- f) $900 - 450 = 450$.
- g) $300 - 75 = 225$ (dvs. delelig med 3, men ikke med 12).
- h) Delelig med 3 og 4 er det samme som delelig med 12. Svar (se punkt e): 75

Oppgave 13

- a) Det er 10 muligheter for samme siffer tre ganger. Det er 000, 111, osv. til 999. Det $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$ forskjellige sekvenser med tre siffer. Dermed blir det $1000 - 10 = 990$ muligheter.
- b) Det er fem mulige valg for et odde siffer først. På de to neste plassene har vi 10 valg. Til sammen $5 \cdot 10 \cdot 10 = 500$ valg.
- c) Vi kan ha 4 først og på midten, først og sist og på midten og sist. På den gjenværende plassen er det 9 muligheter. Dermed $3 \cdot 9 = 27$.

Oppgave 15

To (engelske) bokstaver og fire siffer: $26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 6.760.000$

To siffer og fire (engelske) bokstaver: $10 \cdot 10 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 26 = 45.697.600$

Til sammen $6760000 + 45697600 = 52.457.600$.

Oppgave 16

«License plate» betyr registreringsnummer – for eksempel for bil. Her må en lese teksten nøye. Det står enten to eller tre (engelske) bokstaver fulgt av enten to eller tre siffer. Det betyr nr. av typen AB12, AB123, ABC12 eller ABC123.

To bokstaver og to siffer: $26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 = 26^2 \cdot 10^2 = 67.600$

To bokstaver og tre siffer: $26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 26^2 \cdot 10^3 = 676.000$

Tre bokstaver og to siffer: $26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 = 26^3 \cdot 10^2 = 1.757.600$

Tre bokstaver og tre siffer: $26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 26^3 \cdot 10^3 = 17.576.000$

Sammenlagt blir dette 20.077.200.

Oppgave 17

På engelsk er det 26 bokstaver. Det er litt uenighet om hvor mange av dem som er vokaler. Bokstavene *A, E, I, O* og *U* er vokaler, og noen sier at også *Y* er vokal. I læreboken i diskret matematikk regnes det med at det er fem vokaler.

- a) Det kan være 21 forskjellige konsonanter på hver av de 8 plassene i strengen, dvs. $21^8 = 37.822.859.361$ forskjellige strenger.
- b) Her kan en konsonant forekomme bare én gang i strengen. Det blir da 21 mulige konsonanter på 1. plass, 20 på 2.plass, osv. Totalt $21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 = 8.204.716.800$,
- c) Det er 5 mulige vokaler på 1. plass, så 26 mulige bokstaver på 2. plass, 26 mulige på 3. plass, osv. Totalt $5 \cdot 26^7 = 40.159.050.880$.

- d) Det er 5 mulige vokaler på 1. plass, så 25 mulige bokstaver på 2. plass siden den på 1. plass ikke kan brukes på nytt, 24 mulige på 3. plass, 23 mulige på 4. plass osv. Totalt $5 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19 = 12.113.640.000$.
- e) Her kan vi bruke negasjonsreglen. Det motsatte av minst én vokal er ingen vokaler. Det kan lages 21^8 forskjellige strenger uten vokaler og totalt 26^8 strenger. Differansen mellom disse blir antallet strenger med minst én vokal. Dvs. antallet blir $26^8 - 21^8 = 208.827.064.576 - 37.822.859.361 = 171.004.205.215$.
- f) Når det skal være bare én vokal kan den plasseres på 8 forskjellige steder og vi har 5 vokaler å velge mellom. For hver slik plassering kan de 7 andre plassene fylles med hvilken som helst av de 21 vokalene. Dermed blir det $5 \cdot 8 \cdot 21^7 = 72.043.541.640$.
- g) Strengen skal starte med X og inneholde minst én vokal. Her kan vi bruke negasjonsreglen. Det er totalt 26^7 strenger som starter med en X og totalt 21^7 stykker som starter med en X og som ikke inneholder noen vokaler (dvs. bare konsonanter). Negasjonsreglen gir dermed at det er $26^7 - 21^7 = 6.230.721.635$ strenger som starter med X og som inneholder minst én vokal.
- h) Samme argumentasjon som i g) gir svaret $26^6 - 21^6 = 223.149.655$.

Oppgave 31

- a) Vi kan se på brud og brudgom som en enhet y. Da blir det igjen 4 personer x. vi kan plassere y på 5 forskjellige steder: først, nest først, osv.

y x x x x
 x y x x x
 x x y x x
 x x x y x
 x x x x y

De 4 andre personene kan plasseres på $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ måter. I tillegg kan brud og brudgom bytte plass innbyrdes. Dermed blir det $2 \cdot 5 \cdot 4! = 240$ muligheter.

- b) Vi kan ha $6! = 720$ mulige plasseringer. Negasjonsregelen sier at når det er 240 av dem der bruden står ved siden av brudgommen, så må det bli $720 - 240 = 480$ plasseringer der brud og brudgom ikke står ved siden av hverandre.
- c) I halvparten av plasseringene må bruden stå til venstre for brudgommen og i den andre halvparten til høyre for brudgommen. Svaret blir derfor $720/2 = 360$.

Oppgave 33

Tre 0-er først: $2^7 = 128$ muligheter

To 0-er bakerst: $2^8 = 256$ muligheter

Tre 0-er først og to 0-er bakerst: $2^5 = 32$ muligheter

Tre 0-er først eller to 0-er bakerst: $128 + 256 - 32 = 352$.

Oppgave 36

Dette er en enkel anvendelse av prinsippet om inklusjon/eksklusjon. Hvis A og B er to mengder, så er $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. Dvs. antallet elementer i unionen av to mengder er lik summen av antallene i de to mengdene minus antallet i snittet.

Gitt tallene $S = \{1, 2, \dots, 100\}$. La A være mengden av de n fra S slik at 4 går opp i n , og la B være mengden av de n slik at 6 går opp i n . Vi skal finne $|A \cup B|$. Vi ser at 4 går opp i 4, 8, 12, 16, $\dots$, 96, 100. Til sammen $100 \text{ div } 4 = 25$ stykker. Tallet 6 går opp i 6, 12, 18, 24, $\dots$, 96. Til sammen $100 \text{ div } 6 = 16$ stykker. Hvilke tall er det som både 4 og 6 går opp i? Det er 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84 og 96. Til sammen $100 \text{ div } 12 = 8$ stykker. Dermed

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 25 + 16 - 8 = 33.$$

Oppgave 39

Det som står i oppgaveteksten stemmer kun på engelsk. På norsk kan vi bruke mange flere bokstaver. Vi tar det på engelsk.

Et variabelnavn kan ha lengde fra og med 1 til og med $2^{16} - 1 = 65535$ tegn. Hvis navnet har $k + 1$ tegn der k går fra 0 til 65534, er det 54 valg på første tegn (26 store bokstaver, 26 små bokstaver, \$ og _) og 64 valg på de øvrige tegnene (de ti sifrene i tillegg). Dermed blir det flg. antall:

$$\sum_{k=0}^{65534} 54 \cdot 64^k = 54 \frac{64^{65535} - 1}{64 - 1} = \frac{6}{7} (64^{65535} - 1)$$