Chapter 5 - Discrete Mathematics and Its Applications

Løsningsforslag på utvalgte oppgaver

Avsnitt 5.1

Oppgave 3

La $s_n : 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$. Utsagnet $P(n)$ er dermed:

$$s_n = n(n+1)(2n+1)/6, \; n \geq 1$$

a) Utsagnet $P(1)$ betyr: $1^2 = 1 \cdot (1+1)(2 \cdot 1 + 1)/6$
b) Vi har $1^2 = 1$ og $1 \cdot (1+1)(2 \cdot 1 + 1)/6 = 2 \cdot 3/6 = 1$. Dvs. $P(1)$ er sann.
c) Induksjonshypotese:
$P(k)$ er sann, dvs. at $s_k = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 = k(k+1)(2k+1)/6$.
d) Vi må vise at hvis $P(k)$ er sann for en $k \geq 1$, så er $P(k+1)$ sann,
dvs. at $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = s_{k+1} = (k+1)(k+2)(2k+3)/6$.
e) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = s_k + (k+1)^2 = k(k+1)(2k+1)/6 + (k+1)^2$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + \frac{6(k+1)^2}{6} = \frac{(k+1)(k(2k+1) + 6(k+1))}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} = (k+1)(k+2)(2k+3)/6$$

f) Induksjonsprinsippet gir at $P(n)$ er sann for alle $n \geq 1$.

Oppgave 9

a) La $s_n = 2 + 4 + 6 + \ldots 2n$. Dette er en aritmetisk rekke og s_n blir lik summen av første og siste ledd ganget med antall ledd og delt med 2, dvs. $s_n = n \cdot (n+1)$.
b) La $P(n)$ være påstanden at $s_n = n \cdot (n+1)$ for alle $n \geq 1$.

1. *Basistrinnet*: $P(1)$ er sann fordi definisjonen av s_n sier at $s_1 = 2$ og formelen $n \cdot (n+1)$ gir 2 for $n = 1$.

2. *Induksjonstrinnet*: Vi antar at utsagnet er sant for et vilkårlig heltall $k \geq 1$, dvs. at $s_{k+1} = (k+1)((k+1)+1) = (k+1)(k+2)$. Vi har $s_{k+1} = 2 + 4 + 6 + \ldots 2k + 2(k+1) = s_k + 2(k+1)$ og dermed at $s_{k+1} = k \cdot (k+1) + 2(k+1) = (k+1)(k+2)$. Siden $P(k)$ er sann vet vi at $s_k = k \cdot (k+1)$ og dermed $s_{k+1} = k \cdot (k+1) + 2(k+1) = (k+1)(k+2)$.

Induksjonsprinsippet gir at $P(n)$ er sann for alle $n \geq 1$.

Oppgave 10

a) La $s_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ . \ . \ . \ + \frac{1}{n(n+1)}$. Vi får $s_1 = \frac{1}{2}$, $s_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$,
$s_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}$ og $s_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} = \frac{4}{5}$. Vi antar at $s_n = \frac{n}{n+1}$.

b) La $P(n)$ være påstanden at $s_n = \frac{n}{n+1}$ for alle $n \geq 1$.

1. *Basistrinnet*: $P(1)$ er sann fordi $s_n = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}$ og $\frac{n}{n+1} = \frac{1}{2}$ for $n = 1$.
2. *Induksjonstrinnet*: Vi antar at $P(k)$ er sann for en $k \geq 1$.

$$s_{k+1} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ . \ . \ . \ + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = s_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)} =$$

$$\frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+2)k+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} =$$

$\frac{k+1}{k+2}$. Dvs. $P(k+1)$ er sann.

Induksjonsprinsippet gir at $P(n)$ er sann for alle $n \geq 1$.

Oppgave 15

La $s_n = 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \ . \ . \ . \ + n(n+1)$ og $P(n) : s_n = n(n+1)(n+2)/3$.

1. *Basistrinnet*: $P(1) : s_1 = 1\cdot(1+1)(1+2)/3$. Vi har $s_1 = 1\cdot 2 = 2$ og $1\cdot(1+1)(1+2)/3 = 2\cdot 3/3 = 2$. Dermed er $P(1)$ sann.
2. *Induksjonstrinnet*: Vi antar at $P(k)$ er sann for et vilkårlig heltall $k \geq 1$. Vi har:

$$s_{k+1} = 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \ . \ . \ . \ + k(k+1) + (k+1)(k+2) = s_k + (k+1)(k+2) =$$

$$k(k+1)(k+2)/3 \ + \ (k+1)(k+2) = (k(k+1)(k+2) + 3(k+1)(k+2))/3$$

$= \ (k+1)(k+2)(k+3)/3$. Dermed er $P(k+1)$ sann.

Induksjonsprinsippet gir at $P(n)$ er sann for alle $n \geq 1$.

Oppgave 29

$P(n)$: "21 går opp i $4^{n+1}+5^{2n-1}$ for alle $n \geq 1$".

1. *Basistrinnet*: $P(1)$: "21 går opp $4^2+5^1=16+5=21$". $P(1)$ er sann.
2. *Induksjonstrinnet*: Vi antar at $P(k)$ er sann for et vilkårlig heltall $k \geq 1$, dvs. at 21 går opp i $4^{k+1}+5^{2k-1}$. Vi skal at $P(k+1)$ er sann, dvs. at 21 går opp i $4^{k+2}+5^{2k+1}$. Vi har:

   $4^{k+2}+5^{2k+1}=4\cdot 4^{k+1}+25\cdot 5^{2k-1}=4(4^{k+1}+5^{2k-1})+21\cdot 5^{2k-1}$. Antagelsen sier at 21 går opp i $4^{k+1}+5^{2k-1}$. Dermed går 21 opp i $4^{k+2}+5^{2k+1}$. $P(k+1)$ er sann.

Induksjonsprinsippet gir at $P(n)$ er sann for alle $n \geq 0$.

Oppgave 44

La $A=\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ og $P(n)$: $A^n=\begin{bmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{bmatrix}$ for alle $n \geq 1$.

1. *Basistrinnet*: $P(1)$: $A^1=\begin{bmatrix} a^1 & 0 \\ 0 & b^1 \end{bmatrix}$. Dette er sant siden $A^1=A$, $a^1=a$ og $b^1=b$.

2. *Induksjonstrinnet*: Vi antar at $P(k)$ er sann for et heltall $k \geq 1$, dvs.

   $$A^k=\begin{bmatrix} a^k & 0 \\ 0 & b^k \end{bmatrix}$$

   Vi skal vise at $P(k+1)$ er sann, dvs. at

   $$A^{k+1}=\begin{bmatrix} a^{k+1} & 0 \\ 0 & b^{k+1} \end{bmatrix}$$

   Vi har $A^{k+1}=A^kA=\begin{bmatrix} a^k & 0 \\ 0 & b^k \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a^k\cdot a+0\cdot 0 & a^k\cdot 0+0\cdot b \\ 0\cdot a+b^k\cdot 0 & 0\cdot 0+b^k\cdot b \end{bmatrix}$
   $=\begin{bmatrix} a^{k+1} & 0 \\ 0 & b^{k+1} \end{bmatrix}$. Med andre ord er $P(k+1)$ sann.

Induksjonsprinsippet gir at $P(n)$ er sann for alle $n \geq 1$.