# *Chapter 4 - Discrete Mathematics and Its Applications*

## Løsningsforslag på utvalgte oppgaver

### Avsnitt 4.1

### Oppgave 1

a) 17 går opp i 68 siden $68 = 4 \cdot 17$
b) 17 går ikke opp i 84 siden vi får en rest på 16 når 84 deles med 17
c) 17 går opp i 357 siden $357 = 21 \cdot 17$
d) 17 går ikke opp i 1001 siden vi får en rest på 15 når 1001 deles med 17

### Oppgave 5

Her må vi anta at verken $\mathrm{a}$ eller $\mathrm{b}$ er 0. Hvis $\mathrm{a}$ går opp i $\mathrm{b}$, så må det finnes et heltall $\mathrm{m}$ slik at $\mathrm{b} = \mathrm{m} \cdot \mathrm{a}$ og hvis $b$ går opp i $a$, må det finnes et heltall $\mathrm{n}$ slik at $\mathrm{a} = \mathrm{n} \cdot \mathrm{b}$. Dermed blir $\mathrm{b} = \mathrm{m} \cdot \mathrm{n} \cdot \mathrm{b}$ og $1 = \mathrm{m} \cdot \mathrm{n}$. Men produktet av to heltall er lik 1 kun hvis begge er 1 eller hvis begge er -1. Dermed må $\mathrm{a} = \mathrm{b}$ eller $\mathrm{a} = -\mathrm{b}$.

### Oppgave 8

La for eksempel $a = 12$, $b = 8$ og $c = 9$. Da er $b \cdot c = 72$. Men 12 går opp i 72, men 12 går ikke opp verken i 8 eller 9.

### Oppgave 9

Kort repetisjon av teorien: Gitt et heltall $a$ og et positivt heltall $d$. Da finnes det to entydige tall $q$ og $r$ der $0 \leq r < d$ slik at $a = q \cdot d + r$. Her kalles $r$ for *resten* og $q$ for *kvotienten*. Med andre ord er $q$ det (hele) antallet ganger $d$ går opp i $a$ og $r$ er resten ved divisjonen.

Definisjonen sier også at når dividenden er **negativ**, skal resten $r$ være slik at $0 \leq r < d$. Med andre ord er resten alltid ikke-negativ. Da kan vi, hvis $d$ **ikke** går opp i dividenden (dvs. $r \neq 0$), bruke flg. regneregel: La $a$ være positiv og la $q$ og $r$ være kvotient og rest når vi deler $a$ med $d$. Da blir, når $-a$ deles med $d$, $-(q+1)$ kvotient og $d - r$ rest.

Eksempel: Hva blir kvotient og rest når –111 skal deles med 11? Vi deler først 111 med 11. Det gir en kvotient $q$ på 10 og en rest $r$ på 1. Dermed får vi at når –111 deles med 11, –(10 + 1) = –11 som kvotient og 11 – 1 = 10 som rest

a) Kvotient: 2 Rest: 5
b) Kvotient: -11 Rest: 10
c) Kvotient: 34 Rest: 7
d) Kvotient: 77 Rest: 0
e) Kvotient: 0 Rest: 0
f) Kvotient: 0 Rest: 3
g) Kvotient: -1 Rest: 2
h) Kvotient: 4 Rest: 0

**Oppgave 10**

a) (11 + 80) mod 12 = 91 mod 12 = 7
b) (12 – 40 ) mod 12 = –28 mod 12 = 12 – (28 mod 12) = 12 – 4 = 8
c) (6 + 100) mod 12 = 106 mod 12 = 10

**Oppgave 17**

a) $13 \bmod 3 = 1$
b) $-97 \bmod 11 = 11 - (97 \bmod 11) = 11 - 9 = 2$
c) $155 \bmod 19 = 3$
d) $-221 \bmod 23 = 23 - (221 \bmod 23) = 23 - 14 = 9$

**Oppgave 20**

De tallene som er kongruent med 4 modulo 12 er gitt på formen $4 + k \cdot 12$ der $k$ er et vilkårlig heltall. Ved for eksempel å velge $k = 0$ , 1 , 2 , 3 , 4 får vi tallene 4, 16, 28, 40 og 52.

**Oppgave 21**

Alle tall på formen $-1 + k \cdot 25$ der k er et vilkårlig heltall, er kongruent med –1 modulo 25. De som ligger mellom –100 og 100 er –76, –51, –26, –1, 24, 49, 74, 99.

**Oppgave 22**

a) 80 er ikke kongruent med 5 modulo 17. 17 går ikke opp i 80 – 5 = 75.
b) 103 er ikke kongruent med 5 modulo 17. 17 går ikke opp i 103 – 5 = 98.
c) –29 er kongruent med 5 modulo 17 siden 17 går opp i –29 – 5 = –34.
d) –122 er ikke kongruent med 5 modulo 17. 17 går ikke opp i –122 – 5 = –127.

**Oppgave 30**

La $n$ være et positivt oddetall. Da kan $n$ skrives på formen $n = 2k + 1$ der $k$ er et heltall. Dermed blir $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k+1) + 1$ og $n^2 - 1 = 4k(k+1)$. Siden hvert annet heltall er et partall må enten $k$ eller $k+1$ være et partall. Det betyr at 8 går opp i $4k(k+1)$. Konklusjon: $n^2 \equiv 1 \pmod{8}$.