

Chapter 2 - Discrete Mathematics and Its Applications

Løsningsforslag på utvalgte oppgaver

Avsnitt 2.6

Oppgave 1

$$\text{Gitt } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}.$$

- a) En matrise med 3 *rader* og 4 *kolonner* er en 3×4 –matrise. Generelt har vi at en $m \times n$ –matrise er en matrise med m rader og n kolonner. Uttrykket $m \times n$ kalles matrisens **dimensjon** (eng: size).
- b) Den første kolonnen fra venstre er 1. kolonne, den neste er 2. kolonne, osv.

Det betyr at 3. kolonne i A er $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$.

- c) Radene nummereres nedover. Den øverste raden er 1. rad, den neste er 2. rad, osv. Det betyr at 2. rad i A er $[2 \ 0 \ 4 \ 6]$.
- d) Vi skriver en matrise A på generell form ved $A = (a_{i,j})$. Symbolet $a_{i,j}$ står for det elementet eller den verdien som ligger i rad nr. i og kolonne nr. j . Det betyr at elementet $a_{3,2}$ eller elementet på plass (3,2) er det elementet som ligger i 3. rad og 2. kolonne. Det er tallet 1 i matrisen A .
- e) Matrisen A^T (læreboka bruker A') er den transponerte til A . Den transponerte til A får vi ved å bytte om rader og kolonner. Dvs. 1. rad i A blir 1. kolonne i A^T , 2. rad i A blir 2. kolonne i A^T , osv. Dette betyr spesielt at hvis A er en $m \times n$ –matrise så vil A^T bli en $n \times m$ –matrise. I vårt tilfelle er A en 3×4 –matrise. Dermed blir A^T flg. 4×3 –matrise:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

Oppgave 2

Hvis to matriser A og B skal kunne adderes, må de ha samme dimensjon.

- a) Her er både A og B 3×3 -matriser, Dermed kan de adderes. Summen blir:

$$A+B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & -5 & -3 \end{bmatrix}.$$

- b) Her er både A og B 2×4 -matriser, Dermed kan de adderes. Summen blir:

$$A+B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 & 6 \\ -4 & -3 & 5 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 9 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 9 & 2 & 10 \\ -4 & -5 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 3

Hvis to matriser A og B skal kunne multipliseres, må de ha riktige dimensjoner. Hvis A er en $m \times n$ -matrise, så må B være en $n \times k$ -matrise for at produktet AB skal være definert. Dette betyr at antallet kolonner i A må være lik antall rader i B . Matriseproduktet AB blir en $m \times k$ -matrise. Det betyr at antallet rader i AB blir det samme som antallet rader i A og antallet kolonner i AB blir det samme som antallet kolonner i B .

Vi finner det som skal være på plass (i, j) i AB ved å «multiplisere» rad i fra A med kolonne j fra B . En rad og en kolonne «multipliseres» ved å danne produktsummen, dvs. vi multipliserer elementene parvis og adderer fortløpende.

- a) Her er både A og B 2×2 -matriser (kvadratiske matriser) og dermed kan de multipliseres. Resultatet AB blir en 2×2 -matrise:

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 4 + 1 \cdot 3 \\ 3 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 11 \\ 2 & 18 \end{bmatrix}.$$

- b) Her er A en 3×2 -matrise og B en 2×3 -matrise og dermed kan de multipliseres. Resultatet AB blir en 3×3 -matrise:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 & 1 \cdot (-2) + (-1) \cdot 0 & 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 \\ 0 \cdot 3 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 0 & 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \\ 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 & 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 0 & 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 9 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

- c) Her er A en 4×2 -matrise og B en 2×4 -matrise og dermed kan de multipliseres. Resultatet AB blir flg. 4×4 -matrise:

$$\begin{bmatrix} -4 & 15 & -4 & 1 \\ -3 & 10 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -8 & 6 \\ 1 & -8 & 18 & -13 \end{bmatrix}$$

Oppgave 4

- a) Her er både A og B 3×3 -matriser. Dermed kan de multipliseres og resultatet AB blir en 3×3 -matrise:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Oppgave 5

Her skal vi finne matrisen $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ som er slik at $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Det betyr at vi må løse følgende system av ligninger:

$$2a + 3c = 3, \quad 2b + 3d = 0, \quad 1a + 4c = 1, \quad 1b + 4d = 2.$$

Ligningene $2a + 3c = 3$ og $1a + 4c = 1$ gir at $a = \frac{9}{5}$ og $c = -\frac{1}{5}$, og ligningene

$2b + 3d = 0$ og $1b + 4d = 2$ gir at $b = -\frac{6}{5}$ og $d = \frac{4}{5}$. Matrisen A blir da slik:

$$\begin{bmatrix} \frac{9}{5} & -\frac{6}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

Oppgave 10

Her er det gitt at A er en 3×4 -matrise, B en 4×5 -matrise og C en 4×4 -matrise. Reglen sier at to matriser multipliseres hvis antallet kolonner i den første er lik antallet rader i den andre. Husk også at hvis vi har en $m \times n$ -matrise, så er m antall rader og n antall kolonner.

- a) AB Dette er ok. A har 4 kolonner og B har 4 rader. AB blir en 3×5 -matrise.
b) BA Dette er **ikke** ok. B har 5 kolonner og A har 3 rader.
c) AC Dette er ok. A har 4 kolonner og C har 4 rader. AC blir en 3×4 -matrise.

- d) CA Dette er **ikke** ok. C har 4 kolonner og A har 3 rader.
- e) BC Dette er **ikke** ok. B har 5 kolonner og C har 4 rader.
- f) CB Dette er ok. C har 4 kolonner og B har 4 rader. CB blir en 4×5 -matrise.

Oppgave 11

Hvis A og B er to matriser slik at både AB og BA er definert, må antall kolonner i A være lik antall rader i B og antall kolonner i B må være lik antall rader i A .
Hvis for eksempel A er en $m \times n$ -matrise, så må B være en $n \times m$ -matrise.

Oppgave 14

En kvadratisk matrise A kalles en diagonalmatrise hvis alle elementene utenfor diagonalen er 0. Gitt to $n \times n$ -diagonalmatriser A og B . La C være matriseproduktet AB . Da er $c_{i,j}$ gitt ved $a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \dots + a_{i,n}b_{n,j}$. Men nå er $a_{i,j} = 0, i \neq j$ og $b_{i,j} = 0, i \neq j$. Dermed vil $c_{i,j} = 0, i \neq j$ og $c_{i,i} = a_{i,i}b_{i,i}$. Se på flg. eksempel:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{bmatrix}, \quad AB = \begin{bmatrix} a_1b_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2b_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3b_3 \end{bmatrix}$$

Oppgave 15

$A^n = A \cdot A \cdot A \cdot \dots \cdot A$ (dvs. et matriseprodukt med n faktorer)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \text{ Her ser vi et mønster!}$$

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 26

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\text{a) } A \vee B = \begin{bmatrix} 1 \vee 0 & 1 \vee 1 \\ 0 \vee 1 & 1 \vee 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } A \wedge B = \begin{bmatrix} 1 \wedge 0 & 1 \wedge 1 \\ 0 \wedge 1 & 1 \wedge 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } A \odot B = \begin{bmatrix} (1 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) & (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) \\ (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) & (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Oppgave 27

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{a) } A \vee B = \begin{bmatrix} 1 \vee 0 & 0 \vee 1 & 1 \vee 1 \\ 1 \vee 1 & 1 \vee 0 & 0 \vee 1 \\ 0 \vee 1 & 0 \vee 0 & 1 \vee 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } A \wedge B = \begin{bmatrix} 1 \wedge 0 & 0 \wedge 1 & 1 \wedge 1 \\ 1 \wedge 1 & 1 \wedge 0 & 0 \wedge 1 \\ 0 \wedge 1 & 0 \wedge 0 & 1 \wedge 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vi finner det logiske produktet $A \odot B$ ved en kombinasjon av $\wedge$ og $\vee$. Vi bruker $\wedge$ mellom to og to elementer fra A og B og tar så $\vee$ mellom resultatene. Vi vet at en $\vee$ er sann (dvs. 1) hvis minst en av sidene er sanne. Derfor kan vi stoppe så fort en $\wedge$ er sann (dvs. 1). Dette er gjort i utregningen nedenfor:

$$\begin{aligned} \text{c) } A \odot B &= \begin{bmatrix} (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) & 1 \wedge 1 & 1 \wedge 1 \\ (1 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) & 1 \wedge 1 & 1 \wedge 1 \\ (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) & (0 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) & (0 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Oppgave 28

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A \odot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Oppgave 29

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^{[2]} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^{[3]} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A \vee A^{[2]} \vee A^{[3]} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$