Chapter 2 - Discrete Mathematics and Its Applications

Løsningsforslag på utvalgte oppgaver

Avsnitt 2.4

Oppgave 1

Gitt $a_n = 2(-3)^n + 5^n$. Da blir:

$$a_0 = 2(-3)^0 + 5^0 = 2*1+1 = 3 ,$$
$$a_1 = 2(-3)^1 + 5^1 = 2*(-3)+5 = -6+5 = -1$$
$$a_4 = 2(-3)^4 + 5^4 = 2*81+625 = 787$$
$$a_5 = 2(-3)^5 + 5^5 = 2*(-243)+3125 = -486+3125 = 2639$$

Oppgave 2

a) $a_0 = 2^0 + 1 = 1+1 = 2,\ a_1 = 2^1 + 1 = 3,\ a_2 = 2^2 + 1 = 5,\ a_3 = 2^3 + 1 = 9$

b) $a_0 = (0+1)^{0+1} = 1^1 = 1,\ a_1 = (1+1)^{1+1} = 2^2 = 4,\ a_2 = (2+1)^{2+1} = 3^3 = 27$

$a_3 = (3+1)^{3+1} = 4^4 = 256$

c) $a_0 = \lfloor 0/2 \rfloor = 0,\ a_1 = \lfloor 1/2 \rfloor = 0,\ a_2 = \lfloor 2/2 \rfloor = 1,\ a_3 = \lfloor 3/2 \rfloor = 1$

d) $a_0 = \lfloor 0/2 \rfloor + \lceil 0/2 \rceil = 0+0 = 0,\ a_1 = \lfloor 1/2 \rfloor + \lceil 1/2 \rceil = 0+1 = 1$

$a_2 = \lfloor 2/2 \rfloor + \lceil 2/2 \rceil = 1+1 = 2,\ a_3 = \lfloor 3/2 \rfloor + \lceil 3/2 \rceil = 1+2 = 3$

Oppgave 3

Her skal de 10 første leddene settes opp.

a) Følgen skal starte med 2 og hvert ledd videre skal være 3 mer enn det foregående leddet. Det blir: 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29
b) Hvert positivt heltall skal settes opp tre ganger og i stigende rekkefølge. Det blir: 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4
c) Hvert positivt oddetall skal settes opp to ganger og i stigende rekkefølge. Det blir: 1, 1, 3, 3, 5, 5, 7, 7, 9, 9
d) Obs: *n*! leses som *n* fakultet og er definert som produktet av heltallene fra 1 til *n*. Dvs. $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ .\ .\ .\ (n-1)\cdot n$. Dermed $a_0 = 1-1 = 0$, $a_1 = 1-2 = -1$,
$a_2 = 2-4 = -2$, $a_3 = 6-8 = -2$, $a_4 = 24-16 = 8$, $a_5 = 120-32 = 88$,
$a_6 = 720-64 = 656$, $a_7 = 5040-128 = 4912$, $a_8 = 40320-256 = 40064$,
$a_9 = 362880-256 = 362368$
e) Følgen skal starte med 3 og videre skal hvert ledd være det dobbelte av foregående ledd. Det blir: 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384, 768, 1536
f) De to første leddene skal være 2 og 4. Deretter skal hvert ledd være summen av de to foregående leddene. Det blir 2, 4, 6, 10, 16, 26, 42, 68, 110, 178

Oppgave 4

1) Tallene 1, 2, 4 kan ses på som de tre første leddene i den geometriske følgen $\{2^n\}, n \geq 0$. Leddene deretter blir da 8, 16, 32, osv.
2) Tallene 1, 2, 4 kan ses på som en følge der $a_0 = 1$, $a_1 - a_0 = 1$, $a_2 - a_1 = 2$ og generelt $a_n - a_{n-1} = n$, $n \geq 1$. Leddene deretter blir da 7, 11, 16, osv.
3) Tallene 1, 2, 4 kan f.eks. ses på som følge der de to første leddene, dvs. a_0 og a_1 er 1 og 2 og der leddene videre er summen av de to foregående leddene pluss 1. Dvs. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 1$, $n \geq 2$. De neste leddene blir da 7, 12, 20, osv.

Oppgave 15

a) Først 1 og 0, så to 1-ere og to 0-er, så tre 1-ere og tre 0-er, osv. De neste tre tallene blir da: 1, 1, 1
b) Hvert oddetall tas med én gang, mens hvert partall tas med to ganger. De neste tre tallene blir da: 9, 10, 10
c) Det er annenhver gang tall på formen 2^n og annenhver gang 0. De neste tre tallene blir da: 32, 0, 64
d) Det starter med 3 og deretter er hvert tall det dobbelte av det foregånde tallet. Dette kan skrives som $a_n = 3 \cdot 2^n$, $n \geq 0$. De neste tre tallene blir da: 384, 768, 1536
e) Dette er en aritmetisk følge. Differensen mellom et ledd og det foregående leddet er –7. Dette kan skrives som $a_n = 15 + n(-7)$, $n \geq 0$. De neste tre tallene blir da: –34, –41, –48
f) Det starter med 3, så økes det med 2, så økes det med 3, så med 4, osv. Hvis $a_0 = 3$ vil $a_1 - a_0 = 2$, $a_2 - a_1 = 3$, $a_3 - a_2 = 4$ eller generelt $a_n - a_{n-1} = n + 1$. Vi skal senere lære en teknikk som gjør oss i stand til å finne en formel for a_n når følgen er definert rekursivt som her. Her får vi bare akseptere at $a_n = (n^2 + 3n + 6)/2$, $n \geq 0$. De neste tre tallene blir dermed 57, 68, 80.

Oppgave 17

a) $\sum_{k=1}^{5}(k+1)$ = 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 20.

b) $\sum_{j=0}^{4}(-2)^j$ = 1 + (–2) + 4 + (–8) + 16 = 11. Geometrisk rekke der a = 1 og r = –2:

$$\sum_{j=0}^{4}(-2)^j = \frac{(-2)^5 - 1}{-2-1} = \frac{-32-1}{-3} = \frac{-33}{-3} = 11$$

c) $\sum_{i=1}^{10} 3 = 30$

d) $\sum_{j=0}^{8}(2^{j+1} - 2^j) = \sum_{j=0}^{8} 2^j = \frac{2^9 - 1}{2-1} = 511$

Oppgave 19

a) Her bruker vi formelen for en geometrisk rekke med $a = 3$ og $r = 2$:

$$\sum_{j=0}^{8} 3 \cdot 2^j \;=\; 3 \cdot \frac{2^9 - 1}{2 - 1} = 3 \cdot \frac{512 - 1}{1} = 3 \cdot 511 = 1533$$

b) $\displaystyle \sum_{j=1}^{8} 2^j = \sum_{j=0}^{7} 2 \cdot 2^j = 2 \cdot \frac{2^8 - 1}{2 - 1} = 2 \cdot (256 - 1) = 510.$

c) $\displaystyle \sum_{j=2}^{8} (-3)^j = \sum_{j=0}^{6} 9 \cdot (-3)^j = 9 \cdot \frac{(-3)^7 - 1}{-3 - 1} = 9 \frac{-2187 - 1}{-4} = 4923.$

d) $\displaystyle \sum_{j=0}^{8} 2(-3)^j = \sum_{j=0}^{8} 2 \cdot (-3)^j = 2 \cdot \frac{(-3)^9 - 1}{-3 - 1} = 2 \frac{-19683 - 1}{-4} = 9842$