

Chapter 2 - Discrete Mathematics and Its Applications

Løsningsforslag på utvalgte oppgaver

Avsnitt 2.3

Husk at *domain* = *definisjonsmengde*, *range* = *verdimengde* og *codomain* = *verdiområde*. Her i løsningsforslaget brukes D for definisjonsmengde og V for verdimengde.

Oppgave 1

- a) Hvis f skal være en funksjon fra $\mathbf{R}$ til $\mathbf{R}$, må det til ethvert element i $\mathbf{R}$ finnes én og bare én tilhørende funksjonsverdi. Men hvis $x = 0$, er ikke $f(x)$ definert (0 i nevner). Det betyr at f ikke er en funksjon fra $\mathbf{R}$ til $\mathbf{R}$.
- b) Her er ikke $f(x)$ definert for negative verdier. Det må det være for at f skal være en funksjon fra $\mathbf{R}$ til $\mathbf{R}$.
- c) Her er $f(x)$ definert med to verdier (+ og $-$) for hver x . Da er det ingen funksjon.

Oppgave 4

- a) La f være funksjonen som til hvert ikke-negativt heltall tilordner tallets siste siffer. Eksempler: $f(13) = 3$, $f(237) = 7$, $f(999) = 9$, $f(100) = 0$. Da blir $D = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ og $V = \{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}$.
- b) Litt uklar oppgavetekst her. Betyr trolig at vi til hvert positivt heltall tilordner det neste (det som er større) i rekkefølgen. Eksempler: $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(100) = 101$. Da blir $D = \{1, 2, 3, \dots\}$ og $V = \{2, 3, 4, \dots\}$.
- c) Begrepet *bit string* er definert i Avsnitt 1.1 (definisjon 7) i læreboken. Vi kaller det en *bitsekvens*. La f være funksjonen som til hver bitsekvens tilordner antallet 1-ere i sekvensen. Eksempler: $f(10101010) = 4$, $f(0000) = 0$, $f(111000) = 3$. Da blir D = mengden av alle bitsekvenser og $V = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.
- d) Funksjonen f tilordner til hver bitsekvens antallet biter i sekvensen. Definisjonsmengden D blir mengden av alle bitsekvenser. En tom bitsekvens har 0 biter. Dermed $V = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

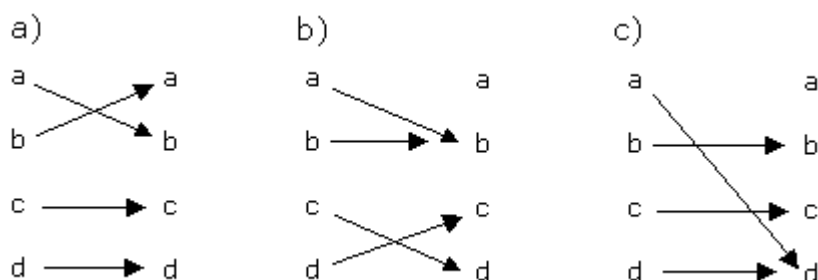
Oppgave 5

Husk at hvis x er et reelt tall betyr $\lfloor x \rfloor$ det største heltallet som er mindre enn eller lik x . Hvis x allerede er et heltall vil $x = \lfloor x \rfloor$. Uttrykket $\lfloor x \rfloor$ blir også omtalt som *avrundingen av x nedover til nærmeste heltall*. Videre betyr $\lceil x \rceil$ det minste heltallet som er større enn eller lik x . Hvis x allerede er et heltall vil $x = \lceil x \rceil$. Uttrykket $\lceil x \rceil$ blir også omtalt som *avrundingen av x oppover til nærmeste heltall*. Vær oppmerksom når x er negativ!! Eksempler: $\lfloor -0,5 \rfloor = -1$ og $\lceil -0,5 \rceil = 0$.

a) $\lceil \frac{3}{4} \rceil = 1$, b) $\lfloor \frac{7}{8} \rfloor = 0$, c) $\lfloor -\frac{3}{4} \rfloor = -1$, d) $\lfloor -\frac{7}{8} \rfloor = -1$, e) $\lceil 3 \rceil = 3$,

f) $\lfloor -1 \rfloor = -1$, g) $\lfloor \frac{1}{2} + \lceil \frac{3}{2} \rceil \rfloor = \lfloor \frac{1}{2} + 2 \rfloor = \lfloor \frac{5}{2} \rfloor = 2$, h) $\lfloor \frac{1}{2} \cdot \lceil \frac{5}{2} \rceil \rfloor = \lfloor \frac{1}{2} \cdot 3 \rfloor = 1$

Oppgave 6 og 7



La $A = \{a, b, c, d\}$. I a), b), c) har vi en funksjon f fra A til A , dvs. $f: A \rightarrow A$.

Funksjonen er *en-til-en* hvis $f(x) = f(y)$ medfører at $x = y$. Eller med andre ord: hvis $x \neq y$, så er $f(x) \neq f(y)$. Dvs. at to forskjellige verdier i definisjonsmengden A ikke kan ha samme funksjonsverdi. På tegningene betyr det at ingen verdi på høyresiden kan ha to piler inn til seg.

Funksjonen er *på* hvis $f(A) = A$. På tegningen betyr det at alle verdiene på høyresiden må ha en pil inn til seg.

- a) Denne er en-til-en og på.
- b) Denne er verken en-til-en eller på. Den er ikke en-til-en fordi $f(a) = f(b)$. Den er ikke på siden det ikke er noen pil inn til a .
- c) Denne er verken en-til-en eller på. Den er ikke en-til-en fordi $f(a) = f(d)$. Den er ikke på siden det ikke er noen pil inn til a .

Oppgave 8

- a) Anta at n og m er to hele tall slik at $f(n) = f(m)$, dvs. $n - 1 = m - 1$. Dette betyr at $n = m$. Dvs. f er en-til-en.
- b) La $n = -1$ og $m = 1$. Da vil $f(n) = n^2 + 1 = (-1)^2 + 1 = 2$. Videre blir $f(m) = m^2 + 1 = 1^2 + 1 = 2$. Dermed har vi $n \neq m$, men $f(n) = f(m)$. Det betyr at f ikke er en-til-en.
- c) Anta at n og m er to hele tall slik at $f(n) = f(m)$, dvs. $n^3 = m^3$. Det betyr at $n = m$. Funksjonen er en-til-en.
- d) Funksjonen $f(n) = \lceil n/2 \rceil$ er definert som det minste heltallet som er større enn eller lik $n/2$ og her menes vanlig divisjon og ikke heltallsdivisjon. Vi har $f(1) = \lceil 1/2 \rceil = \lceil 0.5 \rceil = 1$ og $f(2) = \lceil 2/2 \rceil = \lceil 1 \rceil = 1$. Med andre ord at $f(1) = f(2)$. Dermed er funksjonen ikke en-til-en.

Oppgave 9

Med på (eng: onto) menes at for alle k i $\mathbf{Z}$ skal det finnes en n i $\mathbf{Z}$ slik at $f(n) = k$.

- a) Her vil $n = k + 1$ passe. Dvs. funksjonen er på.
- b) Det finnes ikke noe heltall n slik at $n^2 + 1 = 3$. f er ikke på.
- c) Det finnes ikke noe heltall n slik at $n^3 = 3$. Dermed kan ikke f være på.
- d) Vi har $f(2k) = \lceil 2k/2 \rceil = k$ for alle heltall k . Dermed er f på.

Oppgave 14

I oppgaven er $\mathbf{N}$ både definisjonsmengde og verdiområde. De aktuelle funksjonene må være funksjoner fra $\mathbf{N}$ til $\mathbf{N}$, dvs. $f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$. Husk at boken definerer $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

- a) $f(n) = n + 1$. Denne blir åpenbart en-til-en, men er ikke på siden det ikke finnes noen $n \in \mathbf{N}$ slik at $f(n) = 0$.
- b) $f(n) = \lceil n/2 \rceil$. Denne er ikke en-til-en siden for eksempel $f(1) = f(2) = 1$. Den er imidlertid på siden $f(0) = 0$, $f(2) = 1$, $f(4) = 2$, $f(6) = 3$, osv.
- c) La $f(n) = n + 1$ når n er et partall og $f(n) = n - 1$ når n er et oddetall. Da blir $f(1) = 0$, $f(0) = 1$, $f(3) = 2$, $f(2) = 3$, $f(5) = 4$, $f(4) = 5$, osv. Denne blir både en-til-en og på.
- d) $f(n) = 1$, dvs. f er den konstante funksjonen 1.

Oppgave 15

Husk at en bijeksjon fra R til R er en funksjon $f : R \rightarrow R$ som er både en-til-en og på.

- a) $f(x) = x + 1$ er en bijeksjon. Hvorfor «er den på? Jo, la $y \in R$. Da vil $f(y - 1) = y - 1 + 1 = y$. Med andre ord går det en «pil» til y . Hvorfor er den en-til-en? Jo, la $x \in R$ og $y \in R$ slik at $f(x) = f(y)$. Det betyr at $x + 1 = y + 1$ og det er det same som $x = y$. Dermed er den en-til-en.
- b) $f(x) = x^2 + 1$ er ikke en bijeksjon. Den er ikke på siden det ikke finnes noen x slik at $f(x) = 0$. Den er heller ikke en-til-en. F.eks. har vi at $f(1) = 2 = f(-1)$.
- c) $f(x) = x^3$ er en bijeksjon. Vi har at hvis $x \neq y$, så er $x^3 \neq y^3$. F.eks. er $(-1)^3 = -1$ og $(1)^3 = 1$. Det betyr at den er en-til-en. La $y \in R$. Da finnes det en $x \in R$ slik at $f(x) = y$. Det er tallet $x = \sqrt[3]{y}$. Det betyr at den er på.
- d) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2}$ er ikke en bijeksjon. Den er ikke på siden det ikke finnes noen x slik at $f(x) = 0$. Den er heller ikke en-til-en. F.eks. har vi at $f(1) = \frac{2}{3} = f(-1)$.