

Chapter 1 - Discrete Mathematics and Its Applications

Løsningsforslag på utvalgte oppgaver

Avsnitt 1.8

Oppgave 1

La n og m være oddetall. Da finnes heltall k og l slik at $n = 2k + 1$ og $m = 2l + 1$. Da blir $n + m = 2k + 1 + 2l + 1 = 2(k + l + 1)$. Dermed er $n + m$ et partall.

Oppgave 3

La $m + n$ og $n + p$ være partall. Her tar vi som gitt at summen av to partall er et partall. Dermed er $m + n + n + p = m + p + 2n$ et partall. Vi tar også som gitt at differensen mellom to partall er et partall. Dermed er $m + p$ et partall siden $m + p = m + p + 2n - 2n$. (Dette er et direkte bevis.)

Oppgave 4

La n være et oddetall. Da finnes et heltall k slik at $n = 2k + 1$. Første kvadratsetning sier at $(k + 1)^2 = k^2 + 2k + 1$. Det gir at $2k + 1 = (k + 1)^2 - k^2$. Dermed er $n = 2k + 1$ differensen mellom to kvadrattall.

Oppgave 9

La n være et heltall. La p være utsagnet " $n^3 + 5$ er et oddetall" og q utsagnet " n er et partall". Vi skal vise $p \rightarrow q$.

a) Kontrapositivt bevis: Anta at $\neg q$ er sann, dvs. at n er et oddetall. Hvis n er et oddeall, må n kunne skrives på formen $n = 2k + 1$. Dermed blir

$$n^3 + 5 = (2k + 1)^3 + 5 = 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1 + 5 = 2(4k^3 + 6k^2 + 3k + 3) = 2m \text{ der } m = 4k^3 + 6k^2 + 3k + 3. \text{ Dette betyr at } n^3 + 5 \text{ blir et partall, dvs. } \neg p \text{ er sann.}$$

b) Bevis ved selvmotsigelse: Anta at p er sann og q usann, dvs. $n^3 + 5$ er et oddetall og n et oddetall. Vi vet at produktet av to oddetall er et oddetall og dermed at produktet av tre oddetall er et oddetall. Med andre ord er n^3 da et oddetall. Men differansen mellom to oddetall er et partall, dvs. $n^3 + 5 - 5 = n^3$ må da være et partall. En selvmotsigelse. Altså må n være et partall.

Oppgave 10

La m og n være heltall, la p være utsagnet ”*produktet mn er et partall*” og q utsagnet ” *m er et partall eller n er et partall*”. Vi skal vise $p \rightarrow q$. Her er det enklest med et kontrapositivt bevis. Dvs. vi skal vise $\neg q \rightarrow \neg p$. Vi antar derfor at q er usann, dvs. at både m og n er oddetall. Hvis m og n er oddetall må de kunne skrives på formen $m = 2k + 1$ og $n = 2l + 1$. Dermed

$$mn = (2k + 1)(2l + 1) = 2(2kl + k + l) + 1 = 2i + 1$$

der $i = 2kl + k + l$. Det betyr at nm er et oddetall og dermed at p er usann.