

Chapter 1 - Discrete Mathematics and Its Applications

Løsningsforslag på utvalgte oppgaver

Avsnitt 1.5

Oppgave 1

- a) For alle reelle tall x finnes det et reelt tall y slik at $x < y$
- b) For alle reelle tall x og for alle reelle tall y gjelder at hvis $x \geq 0$ og $y \geq 0$, så er $xy \geq 0$.
- c) For alle reelle tall x og for alle reelle tall y finnes det et reelt tall z slik at $xy = z$.

Oppgave 2

La $Q(x, y)$ stå for: « x har sendt en epost til y ».

- a) Det finnes studenter x og y slik at x har sendt en epost til y .
- b) Det finnes en student som har sendt epost til alle i klassen.
- c) Alle i klassen har sendt en epost til noen.
- d) Det finnes en student som har fått en epost fra alle i klassen.
- e) Alle har fått minst én epost.
- f) Alle har sendt epost til alle.

Oppgave 5

- a) $\forall x L(x, Jerry)$
- b) $\forall x \exists y L(x, y)$
- c) $\exists y \forall x L(x, y)$
- d) $\neg \exists x \forall y L(x, y) = \forall x \exists y \neg L(x, y)$
- e) $\exists y \neg L(Lydia, y) = \neg \forall y L(Lydia, y)$
- f) $\exists y \forall x \neg L(x, y) = \neg \forall y \exists x L(x, y)$

Oppgave 13

Gitt at m og n er heltall.

- a) $\forall n \exists m (n^2 < m)$: For alle heltall n eksisterer et heltall m slik at $n^2 < m$. Hvis n er et vilkårlig heltall vil n^2 være et ikke negativt tall (dvs. et tall som er større enn eller lik 0). Men da kan vi alltid velge et tall m som er enda større, for eksempel m lik $n^2 + 1$. Utsagnet er med andre ord sant.

b) $\exists n \forall m (n < m^2)$: Det eksisterer et heltall n slik at for alle m gjelder $n < m^2$. Vi har at m^2 er ikke-negativ. Hvis vi velger $n = -1$ vil $n < m^2$ være sann for alle m . Vi kunne la n være et annet negativt tall. Poenget er at det skal eksistere minst én n .

c) $\forall n \exists m (n + m = 0)$: For alle n eksisterer en m slik at $n + m = 0$. Tallet n skal kunne velges fritt og til hvert valg av n skal det finnes en m slik at $n + m = 0$. Vi ser at dette stemmer hvis vi velger $m = -n$. Med andre ord er utsagnet sant.

d) $\exists n \forall m (nm = m)$: Det eksisterer en n slik at for alle m gjelder $nm = m$. Hvis $n = 1$ vil $nm = m$ være sant for alle m . Utsagnet er sant.

e) $\exists n \exists m (n^2 + m^2 = 5)$: Det eksisterer en n og det eksisterer en m slik at $n^2 + m^2 = 5$. Hvis vi velger $n = 1$ og $m = 2$ er dette sant. Men det er også andre valg, for eksempel $n = 1$ og $m = -2$, osv. Poenget er at det finnes minst én n og minst én m slik at $n^2 + m^2 = 5$ er sant. Med andre ord er utsagnet sant.

f) $\exists n \exists m (n^2 + m^2 = 6)$. Dette er omtrent maken til e), men nå er det ikke sant. Det er ikke mulig å finne heltall n og m slik at $n^2 + m^2 = 6$.

g) $\exists n \exists m (n + m = 4 \wedge n - m = 1)$. Nå er $n + m = 4 \wedge n - m = 1$ rett og slett et ligningssystem. To ligninger og to ukjente. Men ligningssystemet har ikke løsning innenfor de hele tallene. Hvis vi forsøker å løse systemet vil vi se at det er $n = 5/2$ og $m = 3/2$ som må være løsningene, men det er ikke hele tall! Utsagnet er galt!

h) $\exists n \exists m (n + m = 4 \wedge n - m = 2)$. Det blir som i g). Men ligningssystemet har denne gangen en løsning innenfor de hele tallene. Det er $n = 3$ og $m = 1$. Utsagnet er sant.

i) $\forall n \forall m \exists p (p = (m + n)/2)$. Hvis $n = 1$ og $m = 2$ vil $(n + m)/2 = 3/2$ og det er ikke noe heltall. Med andre ord finnes ikke noe heltall p slik at $p = (m + n)/2$ for disse to valgene av n og m . Påstanden er at det skulle gjelde for alle valg av n og m og dermed er påstanden gal.

Oppgave 17

a) $\neg \forall x \forall y P(x, y) \equiv \exists x \exists y \neg P(xy)$

b) $\neg \forall y \exists x P(x, y) \equiv \exists y \forall x \neg P(xy)$

c) $\neg \forall y \forall x (P(x, y) \vee Q(x, y)) \equiv \exists x \exists y (\neg P(xy) \wedge \neg Q(x, y))$

d) $\neg (\exists x \exists y \neg P(x, y) \wedge \forall x \forall y Q(x, y)) \equiv \forall x \forall y P(x, y) \vee \exists x \exists y \neg Q(xy)$

$$\begin{aligned}
\text{e) } \neg \forall x (\exists y \forall z P(x, y, z) \wedge \exists z \forall y P(x, y, z)) &\equiv \exists x \neg (\exists y \forall z P(x, y, z) \wedge \exists z \forall y P(x, y, z)) \\
&\equiv \exists x (\neg \exists y \forall z P(x, y, z) \vee \neg \exists z \forall y P(x, y, z)) \equiv \exists x (\forall y \exists z \neg P(x, y, z) \vee \forall z \exists y \neg P(x, y, z))
\end{aligned}$$