Chapter 1 - Discrete Mathematics and Its Applications

Løsningsforslag på utvalgte oppgaver

Avsnitt 1.4

Oppgave 1

$P(x)$ står for utsagnet «$x \leq 4$».

a) $P(0) = S$ b) $P(4) = S$ c) $P(6) = U$

Oppgave 2

$P(x)$ står for utsagnet «ordet x inneholder bokstaven a».

a) $P(orange) = S$ b) $P(lemon) = U$ c) $P(true) = U$ d) $P(false) = S$

Oppgave 5

La $P(x)$ være definert ved "*x tilbringer hver dag mer enn 5 timer på skolen*". Begrepet *the universe of discourse for x* oversetter vi til definisjonsmengde, dvs. det område (den mengden) x kan variere innenfor.

Uttrykket $\exists x P(x)$ leses normalt som *det eksisterer en x slik at P(x).* Men vi kan også bruke andre enn eksistere, f.eks. *det finnes en x slik at P(x)* eller *det er en x slik at P(x). er.* Uttrykket $\forall x P(x)$ leses normalt som *for alle x gjelder P(x).* Også her er det mulig å bruke andre formuleringer – f.eks. *for alle x er det slik at P(x)* eller *for alle x har vi at P(x).*

a) $\exists x\, P(x)$: Det finnes en student som er på høgskolen minst 5 timer hver dag.

b) $\forall x\, P(x)$: Alle studenter er på høgskolen minst 5 timer hver dag.

c) $\exists x\, \neg P(x)$: Minst én student er ikke på høgskolen minst 5 timer hver dag.

d) $\forall x\, \neg P(x)$: Direkte oversatt blir det: For enhver student gjelder at studenten ikke er på høgskolen minst 5 timer hver dag. Husk at vi har: $\forall x\, \neg P(x) \equiv \neg \exists x\, P(x)$. Dermed kan vi også si: Ingen studenter er på høgskolen minst 5 timer hver dag.

Oppgave 6

$C(x)$ = «*x er har en katt*», $D(x)$ = «*x har en hund*» og $F(x)$ = «*x er har en ilder*».

a) $\exists x(C(x) \wedge D(x) \wedge F(x))$
b) $\forall x(C(x) \vee D(x) \vee F(x))$
c) $\exists x(C(x) \wedge F(x) \wedge \neg D(x))$
d) $\neg\exists x(C(x) \wedge D(x) \wedge F(x))$
e) $\exists x C(x) \wedge \exists x D(x) \wedge \exists x F(x)$

Oppgave 7

$P(x)$ = «*x kan russisk*», $Q(x)$ = «*x kan C++*».

a) $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$
b) $\exists x(P(x) \wedge \neg Q(x))$
c) $\forall x(P(x) \vee Q(x))$
d) $\forall x \neg(P(x) \vee Q(x))$

Oppgave 8

a) $P(0)$ er sann fordi $0 = 0^2$.
b) $P(1)$ er sann fordi $1 = 1^2$.
c) $P(2)$ er usann fordi $2 \neq 2^2 = 4$.
d) $P(-1)$ er usann fordi $-1 \neq (-1)^2 = 1$.
e) $\exists x P(x)$ er sann fordi det finnes en *x* slik at $P(x)$ er sann, f.eks. $x = 1$.
f) $\forall x P(x)$ er usann fordi $P(x)$ er ikke sann for alle *x*, se f.eks. c).

Oppgave 10

Her skal *n* være et heltall.

a) $\forall n\ (n^2 \geq 0)$: For alle heltall *n* gjelder at kvadratet av *n* er ≥ 0. Sant.
b) $\exists n\ (n^2 = 2)$: Det eksisterer et heltall *n* slik at $n^2 = 2$. Usant.
c) $\forall n\ (n^2 \geq n)$: For alle **heltall** *n* gjelder at $n^2 \geq n$. Vi vet at n^2 er større enn eller lik 0 for alle n. Da er $n^2 \geq n$ helt sikkert sann hvis *n* er negativ. Vi ser også at det er sant når *n* er 0 og når $n \geq 1$. Dermed er det sant for alle *n*. Legg merke til at det ikke er sant hvis *n* kunne være et desimaltall. Hvis $n = 0{,}5$ vil $n^2 = 0.25$, og det er ikke sant at $0{,}25 \geq 0{,}5$.
d) $\exists n\ (n^2 < 0)$: Det eksisterer et heltall *n* slik at $n^2 < 0$. Det er usant siden et kvadrat alltid er større enn eller lik 0.

Oppgave 11

a) $\exists x\, P(x) = P(0) \vee P(1) \vee P(2) \vee P(3) \vee P(4)$
b) $\forall x\, P(x) = P(0) \wedge P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge P(4)$
c) $\exists x \neg P(x) = \neg P(0) \vee \neg P(1) \vee \neg P(2) \vee \neg P(3) \vee \neg P(4)$
d) $\forall x \neg P(x) = \neg P(0) \wedge \neg P(1) \wedge \neg P(2) \wedge \neg P(3) \wedge \neg P(4)$
e) $\neg \exists x\, P(x) = \neg (P(0) \vee P(1) \vee P(2) \vee P(3) \vee P(4))$
f) $\neg \forall x\, P(x) = \neg (P(0) \wedge P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge P(4))$

Oppgave 15

La $P(x)$ være definert ved «*x er perfekt*».

a) $\neg \exists x P(x)$ eller $\forall x \neg P(x)$
b) $\neg \forall x P(x)$ eller $\exists x \neg P(x)$