

Chapter 1 - Discrete Mathematics and Its Applications

Løsningsforslag på utvalgte oppgaver

Avsnitt 1.3

Oppgave 2

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$\neg (p \wedge q)$	$\neg p \vee \neg q$
S	S	U	U	S	U	U
S	U	U	S	U	S	S
U	S	S	U	U	S	S
U	U	S	S	U	S	S

Oppgave 3

Symbolet $\equiv$ kalles ekvivalenssymbolet. Det betyr at det som står på hver side er ekvivalent. At to sammensatte utsagn er ekvivalente kan vises ved hjelp av en sannhetsverditabell. Da må de to tilhørende kolonnene ha de samme verdiene.

p	q	r	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
S	S	S	S	S	S	S	S
S	S	U	S	U	S	S	S
S	U	S	U	S	S	S	S
S	U	U	U	U	U	U	U
U	S	S	U	U	S	U	U
U	S	U	U	U	S	U	U
U	U	S	U	U	S	U	U
U	U	U	U	U	U	U	U

Vi ser at de to siste kolonnene i sannhetsverditabellen er like. Dermed er $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.

Oppgave 4

- a) Jan er ikke rik eller ikke lykkelig.
- b) Carlos vil ikke sykle og ikke løpe i morgen.
- c) Mei går ikke og tar ikke bussen til skolen.
- d) Ibrahim er ikke intelligent eller ikke hardt arbeidende.

Oppgave 5

Det er en *tautologi* (eller en selvfølgelighet) når sannhetsverditabellen for et logisk utsagn kun inneholder verdien S.

b), e) og f)

p	q	$\neg q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \rightarrow (p \vee q)$	$\neg(p \rightarrow q)$	$\neg(p \rightarrow q) \rightarrow p$	$\neg(p \rightarrow q) \rightarrow \neg q$
S	S	U	S	S	S	U	S	S
S	U	S	S	U	S	S	S	S
U	S	U	S	S	S	U	S	S
U	U	S	U	S	S	U	S	S

Kolonnene viser at $p \rightarrow (p \vee q)$, $\neg(p \rightarrow q) \rightarrow p$ og $\neg(p \rightarrow q) \rightarrow \neg q$ er tautologier.

Oppgave 7

b) 1. måte: Utsagnet $p \rightarrow (p \vee q)$ er usant kun når p er sann og $p \vee q$ er usann. Men hvis p er sann er også $p \vee q$ sann. Med andre ord er $p \rightarrow (p \vee q)$ alltid sann.

2. måte bruker reglene fra boken (Tabellene 1 – 8 side 23 – 26 i boken):

$$\begin{aligned}
 & p \rightarrow (p \vee q) && \text{Øverste regel i Tabell 7} \\
 \equiv & \neg p \vee (p \vee q) && \text{Assosiativ lov i Tabell 6} \\
 \equiv & (\neg p \vee p) \vee q && \text{Tabell 1} \\
 \equiv & S \vee q && \text{Domineringslov i Tabell 6} \\
 \equiv & S
 \end{aligned}$$

e) 1. måte: En implikasjon er usann kun når venstre side er sann og høyre side usann. Anta derfor at (høyre side) p er usann. Men hvis p er usann, er $p \rightarrow q$ sann og dermed $\neg(p \rightarrow q)$ usann. Med andre ord blir det her aldri sann på venstre side og usann på høyre side.

$$2. \text{ måte: } \neg(p \rightarrow q) \rightarrow p \equiv (p \wedge \neg q) \rightarrow p \equiv \neg(p \wedge \neg q) \vee p \equiv \neg p \vee q \vee p \equiv q \vee S \equiv S$$

f) 1. måte: Det kontrapositive til $\neg(p \rightarrow q) \rightarrow \neg q$ er $q \rightarrow (p \rightarrow q)$. Et utsagn og det kontrapositive utsagnet har samme sannhetsverditabell. Vi kan derfor isteden vise at $q \rightarrow (p \rightarrow q)$ er en tautologi. Hvis q er sann, så er $p \rightarrow q$ sann. En implikasjon er alltid sann når det på høyre side er sant. Det betyr at $q \rightarrow (p \rightarrow q)$ alltid er sant.

2. måte:

$$\neg(p \rightarrow q) \rightarrow \neg q \equiv q \rightarrow (p \rightarrow q) \equiv \neg q \vee (p \rightarrow q) \equiv \neg q \vee \neg p \vee q \equiv (\neg q \vee q) \vee \neg p \equiv S$$

Oppgave 8

Det er minst tre mulige fremgangsmåter: 1) å argumentere slik som i lærebokens fasit til denne oppgaven, 2) bruke formlene i tabellene 1 – 8 på side 23 – 26 i boken eller 3) bruke en sannhetsverditabell. Fremgangsmåte 1) er allerede dekket og fremgangsmåte 2) blir litt innviklet her. Vi bruker derfor fremgangsmåte 3):

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \rightarrow q$	$\neg q \wedge (p \rightarrow q)$	$(\neg q \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg p$
S	S	U	U	S	U	S
S	U	U	S	U	U	S
U	S	S	U	S	U	S
U	U	S	S	S	S	S

Dette er en tautologi siden kolonnen (den siste) kun inneholder S-er.

Oppgave 11

p	q	r	$p \rightarrow r$	$q \rightarrow r$	$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$	$(p \vee q)$	$(p \vee q) \rightarrow r$
S	S	S	S	S	S	S	S
S	S	U	U	U	U	S	U
S	U	S	S	S	S	S	S
S	U	U	U	S	U	S	U
U	S	S	S	S	S	S	S
U	S	U	S	U	U	S	U
U	U	S	S	S	S	U	S
U	U	U	S	S	S	U	S

Vi ser at 8. og 8. kolonne er like. Dermed er $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$ og $(p \vee q) \rightarrow r$ ekvivalente.

$$\begin{aligned} \text{Dette kan også vises slik: } (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) &\equiv (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r) \\ &\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee r \equiv \neg(p \vee q) \vee r \equiv (p \vee q) \rightarrow r \end{aligned}$$