Eksamen i Diskret matematikk onsdag 18. februar 2015

Løsningsforslag

Oppgave 1

a) i) $p \land q$ ii) $\lnot q \lor \lnot p$ iii) $p \to q$ iv) $q \to p$

b) i) Ved hjelp av omregningsformeler

$$(p \to q) \to r \equiv (\lnot p \lor q) \to r \equiv \lnot(\lnot p \lor q) \lor r \equiv (p \land \lnot q) \lor r$$

ii) Ved hjelp av sannhetsverditabell

p	q	r	$\lnot q$	$p \land \lnot q$	$(p \land \lnot q) \lor r$	$p \to q$	$(p \to q) \to r$
S	S	S	U	U	S	S	S
S	S	U	U	U	U	S	U
S	U	S	S	S	S	U	S
S	U	U	S	S	S	U	S
U	S	S	U	U	S	S	S
U	S	U	U	U	U	S	U
U	U	S	S	U	S	S	S
U	U	U	S	U	U	S	U

like kolonner

Utsagnene $(p \land \lnot q) \lor r$ og $(p \to q) \to r$ er ekvivalente siden de tilhørende kolonnene er like.

c) En huskeregel sier at $p \to q$ er lik SUSS. Dermed passer utsagnet $\lnot(p \to q)$ inn der spørsmålstegnet står. Det kan også skrives som $p \land \lnot q$

Oppgave 2

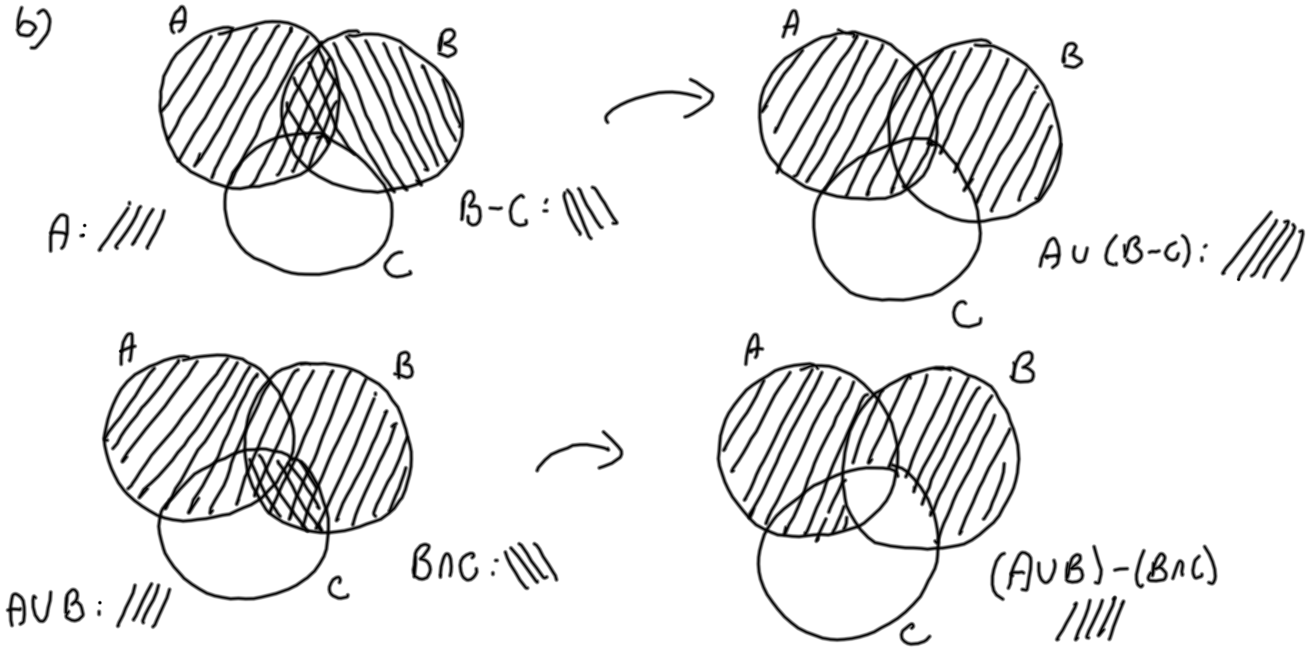
a) i) $B \cap C = \{b, c, f, g\} \cap \{b, d, e, f\} = \{b, f\}$

ii) $B - C = \{b, c, f, g\} - \{b, d, e, f\} = \{c, g\}$

iii) $A \cup (B - C) = \{a, b, c, d\} \cup \{c, g\} = \{a, b, c, d, g\}$

iv) $(A \cup B) - (B \cap C) = \{a, b, c, d, f, g\} - \{b, f\} = \{a, c, d, g\}$

b)



c) I punkt b) står Venn-diagrammene for $X = A \cup (B - C)$ og $Y = (A \cup B) - (B \cap C)$. Vi ser at forskjellen mellom de to er det som ligger i "midten". Dermed blir $X - Y = A \cap B \cap C$.

Oppgave 3

a) $|A| = 35 - 11 + 1 = 25$, $|B| = 18 - 0 + 1 = 19$

Tosifrede tall fra B som er primtall: 11, 13, 17

b) $f(20) = 2 \cdot 0 = 0$, $f(29) = 2 \cdot 9 = 18$, $f(35) = 3 \cdot 5 = 15$

c) i) $0 \in V_f$ siden $f(20) = 0$

ii) Tallene fra 1 til 9 er i V_f siden $f(11) = 1, f(12) = 2, \ldots, f(19) = 9$

iii) $10 \in V_f$ siden $f(25) = 2 \cdot 5 = 10$

iv) 11, 13 og 17 er ikke i V_f siden de er primtall.

v) $f(26) = 12$, $f(27) = 14$, $f(35) = 15$, $f(28) = 16$ og $f(29) = 18$.

Dermed: $V_f = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18\}$

d)

0	$f(20), f(30)$	6	$f(16), f(23), f(32)$	12	$f(26), f(34)$
1	$f(11)$	7	$f(17)$	13	—
2	$f(12), f(21)$	8	$f(18), f(24)$	14	$f(27)$
3	$f(13), f(31)$	9	$f(19), f(33)$	15	$f(35)$
4	$f(14), f(22)$	10	$f(25) = 10$	16	$f(28)$
5	$f(15)$	11	—	17	—
				18	$f(29)$

Vi ser at 6 blir "truffet" av tre piler og det er flest.

e) f er ikke en-til-en siden flere verdier i B blir "truffet" av flere piler. F.eks. blir 6 "truffet" av tre piler.

f er ikke på siden hverken 11, 13 eller 17 blir "truffet" av en pil.

Oppgave 4

a) A er en 2×3-matrise
B er en 3×2-matrise
C er en 3×3-matrise

b) AB er definert og blir en 2×2-matrise
BA er definert og blir en 3×3-matrise
AC er definert og blir en 2×3-matrise
CA er ikke definert
BC er ikke definert
CB er definert og blir en 3×2-matrise

c)

$$AC = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot1+0\cdot0+(-1)\cdot1 & 1\cdot0+0\cdot1+(-1)0 & 1\cdot2+0\cdot1+(-1)2 \\ 0\cdot1+1\cdot0+1\cdot1 & 0\cdot0+1\cdot1+1\cdot0 & 0\cdot2+1\cdot1+1\cdot2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

d) $BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1+0\cdot 0 & 1\cdot 0+0\cdot 1 & 1(-1)+0\cdot 1 \\ 0\cdot 1+1\cdot 0 & 0\cdot 0+1\cdot 1 & 0(-1)+1\cdot 1 \\ (-1)1+0\cdot 0 & (-1)0+0\cdot 1 & (-1)(-1)+0\cdot 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Oppgave 5

a) $9 = 1001_2$, $10 = 1010_2$, $11 = 1011_2$, $12 = 1100_2$

b)

361	180	90	45	22	11	5	2	1	0
2	1	0	0	1	0	1	1	0	1

$361_{10} = 101101001_2 = 1|0110|1001| = 169_{16}$

c) Vi ser at hverken 2, 3, 5, 7, 11, 13 eller 17 går opp i 361. Men 19 går opp og $361 = 19 \cdot 19$. Dermed er 361 ikke et primtall

d) $AAAA_{16} = 1010101010101010_2 = \overset{}{1}|\overset{2}{010}|\overset{5}{101}|\overset{2}{010}|\overset{5}{101}|\overset{2}{010}$

$= 125252_8$.

$AAAA_{16} = \sum_{k=0}^{3} A \cdot 16^k = A \frac{16^4-1}{16-1} = \frac{10}{15}(65536-1) = \frac{2}{3} 65535 = 43690_{10}$

e) $\sum_{k=0}^{7} 2 \cdot 4^k = 22222222_4 = 1010101010101010_2 = AAAA_{16} = 43690$

Oppgave 6

a) Det er $2^{10} = 1024$ forskjellige bitsekvenser med lengde 10.

b) To 1-biter kan plasseres på $\binom{10}{2}$ måter. Lar vi resten være 0-biter får vi bitsekvenser med nøyaktig to 1-biter. Svaret blir derfor $\binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$.

c) 1 _ 1 _ _ _ _ _ _ _ _

Hvis den ene 1-biten står først, kan den andre 1-biten stå 8 forskjellige steder.

_ 1 _ 1 _ _ _ _ _ _ _

Hvis den ene 1-biten står på andre plass, kan den andre 1-biten stå 7 forskjellige steder.

osv.

Dermed blir det $8+7+\dots+3+2+1 = 9\cdot 8/2 = 36$ forskjellige bitsekvenser med nøyaktig to 1-biter der de ikke er naboer.

d) Dette kan løses ved å dele det opp i flg. tilfeller:

i) Ingen 1-ere : 1 mulighet

ii) Én 1-er : 10 muligheter

iii) To 1-ere : 36 muligheter (se punkt c)

iv) Tre 1-ere :

1 _ 1 _ 1 _ _ _ _ _ _

1-er på første og tredje plass : 6 muligheter
— " — fjerde plass : 5 — " —
osv.
21 muligheter

1-er på andre og fjerde plass : 5 muligheter
— " — femte plass : 4 — " —
osv
15 muligheter

Tilsammen får vi $21+15+10+6+3+1 = 56$ muligheter

v) Fire 1-ere : Ved å gjøre som over får vi 35 muligheter

vi) Fem 1-ere : 6 muligheter

Tilsammen blir dette $1+10+36+56+35+6 = \underline{144}$ muligheter

Punkt d) kan løses enklere ved hjelp av en differensligning. La a_n være antallet bitsekvenser med lengde n som ikke inneholder 1-ere som er naboer. La $n \geq 2$. En slik bitsekvens kan ende med 0 eller 1, men hvis den ender med 1, må nest siste bit være 0. Omvendt: Hvis vi har en slik bitsekvens med lengde $n-1$, så får vi en med lengde n ved å sette 0 bakerst. Hvis vi har en slik en med lengde $n-2$, får vi en med lengde n ved å sette 01 bakerst. Dermed:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

Vi ser fort at $a_2 = 3$ (00, 10, 01) og $a_3 = 5$ (000, 100, 010, 001, 101).

Dette stemmer også med $a_0 = 1$ og $a_1 = 2$. Differensligningen gir oss Fibonacci-tallene:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a:	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

Dermed: $\underline{a_{10} = 144}$

Oppgave 7

a) $|A| = 1 \cdot 10 \cdot 10 = 100$, $|B| = 9 \cdot 1 \cdot 10 = 90$, $|C| = 9 \cdot 10 \cdot 1 = 90$

b) $|A \cap B| = 1 \cdot 1 \cdot 10 = 10$, $|B \cap C| = 9 \cdot 1 \cdot 1 = 9$, $|A \cap C| = 1 \cdot 10 \cdot 1 = 10$

$|A \cap B \cap C| = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

c) $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$

$$= 100 + 90 + 90 - 10 - 9 - 10 + 1 = 252$$

d) Hvis 5 ikke skal inngå, er det 8 muligheter som første siffer og 9 som andre og tredje siffer. Dermed $8 \cdot 9 \cdot 9 = 648$ tall uten 5. Det er $999 - 100 + 1 = 900$ tosifrede tall. Dermed $|A \cup B \cup C| = 900 - 648 = 252$.

e) I oppgaveteksten står 489 som eksempel på et tresifret tall med 21 som tverrsum. Men 489 kan stokkes om på $3! = 6$ måter. Dermed får vi seks tresifrede tall med 21 som tverrsum.

Vi ser at sifrene i 489 kommer i stigende rekkefølge.

Vi har flg. slike tresifrede tall:

399	– kan stokkes om på	3 måter
489	—"—	6 —"—
579	—"—	6 —"—
588	—"—	3 —"—
669	—"—	3 —"—
678	—"—	6 —"—
777	—"—	1 —"—

Tilsammen 28 tresifrede tall med 21 som tverrsum

Oppgave 8

a) $a_2 = 2a_1 + 8a_0 = 2\cdot 2 + 8\cdot 2 = 4 + 16 = 20$

$a_3 = 2a_2 + 8a_1 = 2\cdot 20 + 8\cdot 2 = 40 + 16 = 56$

b) Karakteristisk polynom: $r^2 = 2r + 8$, $r^2 - 2r - 8 = 0$.

Løsninger: $r = \frac{2 \pm \sqrt{4-(-32)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2}$, $r_1 = 4$, $r_2 = -2$

Generell løsning: $a_n = \alpha 4^n + \beta(-2)^n$.

Ligningssystem: $\left.\begin{array}{l} \alpha + \beta = a_0 = 2 \\ 4\alpha - 2\beta = a_1 = 2 \end{array}\right\} \alpha = 1, \beta = 1$

Løsning: $a_n = 4^n + (-2)^n$ $\left\{\begin{array}{l} a_2 = 4^2 + (-2)^2 = 20 \text{ ok!} \\ a_3 = 4^3 + (-2)^3 = 64 - 8 = 56 \text{ ok!} \end{array}\right.$

c) $a_7 = 4^7 + (-2)^7 = 16384 - 128 = 16256$.

Oppgave 9

a) $R = \{(a,b), (a,d), (b,b), (b,d), (c,a), (c,b), (d,b), (d,c)\}$

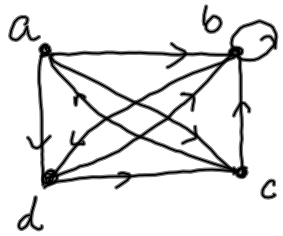
b)
$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

c) R er ikke refleksiv siden f.eks. (a,a) mangler.
Hvis vi tar med (a,a), (c,c) og (d,d), så blir den refleksiv.

d) R er ikke symmetrisk siden f.eks. $(a,b) \in R$, men $(b,a) \notin R$.
Hvis vi tar med (a,c), (b,a), (b,c), (c,d) og (d,a), så blir den symmetrisk.

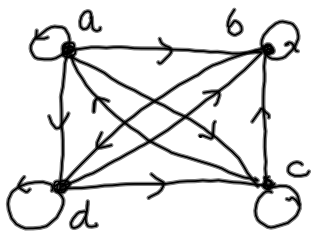
e) R er ikke transitiv siden f.eks. $(a,d) \in R$ og $(d,c) \in R$, men $(a,c) \notin R$.

i) Tar vi med (a,c) får vi



ii) Siden (d,b) og (b,d) er med, må (d,d) være med.
Siden (a,c) og (c,a) er med, må (a,a) være med.
Siden (c,a) og (a,c) er med, må (c,c) være med.

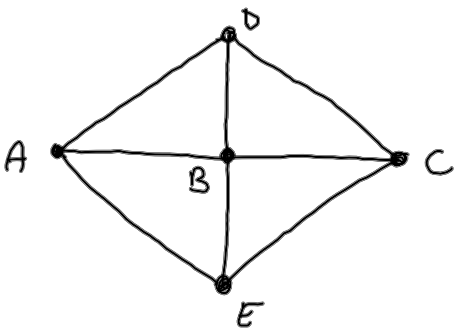
Dermed



iii) Vi ser at (b,d) og (d,c) er med. Da må (b,c) være med.
Vi ser at (d,c) og (c,a) er med. Da må (d,a) være med.
Vi ser at (c,b) og (b,d) er med. Da må (c,d) være med.
Legger vi inn (b,c), (d,a) og (c,d) får vi at (b,c) og (c,a) er med. Da må også (b,a) være med.
Dermed må alle par være med for at den skal bli transitiv.

Oppgave 10

a)



b) grad (A) = 3
grad (B) = 4
grad (C) = 3
grad (D) = 3
grad (E) = 3

c) En spasertur der hver bro passeres nøyaktig én gang er mulig hvis og bare hvis det finnes en Eulervei i grafen. Men det finnes ingen Eulervei siden det er flere enn to punkter med oddetallsgrad. Dermed er en slik spasertur umulig.

d) En ny bro mellom D og E vil gi en graf med flg. grader:

grad (A) = 3
grad (B) = 4
grad (C) = 3
grad (D) = 4
grad (E) = 4

Nå vil det finnes en åpen Eulervei siden nøyaktig to punkter har oddetallsgrad. En slik vei må starte i A og slutte i C eller omvendt.